Übungen zu “Lineare Algebra und Geometrie 2”

Wintersemester 2012/13

Stefan Haller

1. Sei $\varphi\colon V \to V$ eine selbstadjungierte Abbildung auf einem endlich dimensionalen Euklidischen oder unitären Vektorraum V. Weiters bezeichne $\lambda_{\min}$ den kleinsten und $\lambda_{\max}$ den größten Eigenwert von φ. Zeige:

$$\lambda_{\min} \operatorname{id}_V \leq \varphi \leq \lambda_{\max} \operatorname{id}_V .$$

2. Seien $\varphi, \psi\colon V \to V$ zwei kommutierende semipositive Abbildungen, d.h. $\varphi \geq 0$, $\psi \geq 0$ und $\varphi\psi = \psi\varphi$. Zeige, dass auch $\varphi\psi \geq 0$ gilt.

3. Bestimme die Quadratwurzeln folgender Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 2\mathbf{i} \\ -2\mathbf{i} & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Bestimme Polarzerlegungen folgender Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & -\mathbf{i} \\ -3\mathbf{i} & 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Bestimme Sinulärwertzerlegungen folgender Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Für jedes $t \in \mathbb{R}$ zeige:

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}, \qquad \text{wobei} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ alle Eigenwerte von A, ihrer Vielfachheit entsprechend oft gelistet. Zeige, dass $e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}$ die Eigenwerte von e^A sind. *Hinweis: A ist triangulierbar.* Schließe daraus:

$$\det\bigl(e^A\bigr) = e^{\operatorname{tr}(A)}.$$

Gilt diese Gleichung auch für reelle Matritzen?

8. Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Für $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ mit $AB = BA$ zeige:

$$e^{A+B} = e^A e^B.$$

Schließe daraus, dass e^A stets invertierbar ist mit Inverser,
$$(e^A)^{-1} = e^{-A}.$$
Zeige dass, $\mathbb{K} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $t \mapsto e^{tA}$, ein Gruppenhomomorphismus ist und, dass
$$\tfrac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA}$$
gilt. Gib auch zwei (nicht kommutierende) Matrizen an, für die $e^{A+B} \neq e^A e^B$.

9. Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Zeige
$$(e^A)^* = e^{A^*},$$
für jede Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Zeige weiters:

(a) Ist A schiefsymmetrisch, d.h. $A^* = -A$, dann ist e^A unitär bzw. orthogonal. Zeige auch, dass sich jede unitäre Matrix in der Form e^A schreiben lässt, wobei $A^* = -A$. Ist A eindeutig bestimmt? Was lässt sich im reellen Fall sagen? *Hinweis: Unitäre Abbildungen sind normal und daher diagonalisierbar.*

(b) Ist A symmetrisch, d.h. $A^* = A$, dann ist e^A positiv. Zeige auch, dass sich jede positive Matrix in der Form e^A schreiben lässt, wobei $A^* = A$. Ist A eindeutig bestimmt?

10. Bestimme die Pseudoinversen folgender Matrizen:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

11. Sei $A = U\Sigma V^*$ eine Singulärwertzerlegung von $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$, d.h.
$$U \in \mathrm{U}_m, \quad V \in \mathrm{U}_n, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & \sigma_k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_i > 0.$$
Zeige, $A^+ = V\Sigma^+U^*$. Verwende dies um die Pseudoinverse der Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
aus Aufgabe 5 zu berechnen.

12. Zeige
$$A^+ = (A^*A)^+A^* = A^*(AA^*)^+$$
für jede reelle oder komplexe Matrix A. *Hinweis: Mit Hilfe der Singulärwertzerlegung, lässt sich dies auf Diagonalmatrizen zurückführen. Alternativ, lässt sich auch nachrechnen, dass $(A^*A)^+A^*$ die vier Eigenschaften hat, die A^+ charakterisieren, und daher mit A^+ übereinstimmen muss.*

13. Sei $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ eine Matrix mit Singulärwerten $\sigma_1, \dots, \sigma_k$, ihrer Vielfachheit entsprechend oft gelistet. Betrachte nun die quadratische selbstadjungierte Matrix $B \in M_{(n+m)\times(n+m)}(\mathbb{C})$,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & A^* \\ A & 0 \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass $\sigma_1, \dots, \sigma_k, -\sigma_1, \dots, -\sigma_k$ alle von Null verschiedenen Eigenwerte von B mit Vielfachheit sind. *Hinweis: Wähle eine Singulärwertzerlegung $A = U\Sigma V^*$, zeige*

$$\begin{pmatrix} 0 & U \\ V & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & A^* \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & V^* \\ U^* & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \Sigma \\ \Sigma^* & 0 \end{pmatrix}$$

und berechne die Eigenwerte dieser Matrix.

14. Für jede Matrix $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ betrachte

$$\|A\| := \sup_{0\neq x\in\mathbb{C}^n} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}, \qquad \|A\|_2 := \big(\operatorname{tr}(A^*A)\big)^{1/2}, \qquad \|A\|_1 := \operatorname{tr}\big((A^*A)^{1/2}\big).$$

Für beliebige unitäre Matrizen $U \in \mathrm{U}_m$ und $V \in \mathrm{U}_n$ zeige:

$$\|UAV^*\| = \|A\|, \qquad \|UAV^*\|_2 = \|A\|_2, \qquad \|UAV^*\|_1 = \|A\|_1.$$

Schließe daraus

$$\|A\| = \max\{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}, \quad \|A\|_2 = \sqrt{\sigma_1^2 + \cdots + \sigma_k^2}, \quad \|A\|_1 = \sigma_1 + \cdots + \sigma_k,$$

wobei $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ die Singulärwerte von A bezeichnen. Zeige auch

$$\|A^*\| = \|A\|, \qquad \|A^*\|_2 = \|A\|_2, \qquad \|A^*\|_1 = \|A\|_1$$

sowie

$$\|A\| \leq \|A\|_2 \leq \|A\|_1.$$

15. Zeige, dass $\|A\|_1$ aus dem vorangehenden Beispiel eine Norm auf $M_{m\times n}(\mathbb{C})$ definiert (für $\|A\|$ und $\|A\|_2$ haben wir dies bereits an anderer Stelle verifiziert):

(a) $\|A\|_1 = 0 \Leftrightarrow A = 0$.
(b) $\|\lambda A\|_1 = |\lambda|\|A\|_1$, für alle $\lambda \in \mathbb{C}$.
(c) $\|A + A'\|_1 \leq \|A\|_1 + \|A'\|_1$, wobei $A, A' \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$.
(d) $\|AA'\|_1 \leq \|A\|_1\|A'\|_1$, wobei $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ und $A' \in M_{n\times k}(\mathbb{C})$.
(e) $|\operatorname{tr}(A)| \leq \|A\|_1$, falls $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$.
(f) $\|BA\|_1 \leq \|B\|\|A\|_1$, für alle $B \in M_{l\times m}(\mathbb{C})$.
(g) $\|AB\|_1 \leq \|A\|_1\|B\|$, für alle $B \in M_{n\times k}(\mathbb{C})$.
(h) $\|A\|_1 = \sup_{\|B\|\leq 1} |\operatorname{tr}(BA)|$, wobei das Supremum über alle $B \in M_{n\times m}(\mathbb{C})$ mit $\|B\| \leq 1$ genommen wird.

Hinweis: (a) und (b) sind leicht. Verifiziere dann (e) unter Verwendung einer Singulärwertzerlegung $A = U\Sigma V^*$ und $|\operatorname{tr}(V^*U\Sigma)| \leq \operatorname{tr}(\Sigma) = \|\Sigma\|_1$. Anleitung für (f) im Fall $l \geq n$: Sei $A = U\Sigma V^*$ eine Singulärwertzerlegung von A, und $BA = WR$ eine Polarzerlegung von BA, d.h. $W \in M_{l\times n}(\mathbb{C})$, $W^*W = I_n$, $R^* = R \geq 0$.

Schließe daraus: $\|BA\|_1 = \operatorname{tr}(R) = \operatorname{tr}(V^*W^*BU\Sigma) = \sum_i \langle V^*W^*BU\Sigma e_i, e_i\rangle \leq \|V^*W^*BU\|\|\Sigma\|_1 \leq \|B\|\|\Sigma\|_1 = \|B\|\|A\|_1$. *(d) und (g) folgen aus (f) und der vorangehenden Aufgabe. Leite nun (h) her, und verwende diese Darstellung um die Dreiecksungleichng (c) zu zeigen.*

16. Gegeben seien reelle Zahlen x_i und y_i wie folgt:

i	1	2	3	4	5
x_i	1.1	1.9	2.8	2.8	4.1
y_i	7.9	6.1	4.5	3.9	1.5

Bestimme ein lineares Polynom, $p(x) = a + bx$, $a, b \in \mathbb{R}$, sodass die Summe der Fehlerquadrate, $\sum_{i=1}^5 \big|p(x_i) - y_i\big|^2$, minimal wird. Fertige eine Skizze an!

17. Gegeben seien reelle Zahlen x_i und y_i wie folgt:

i	1	2	3	4	5
x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	1.1	-0.2	1.3	3.9	9.6

Bestimme ein quadratisches Polynom, $p(x) = a + bx + cx^2$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, sodass die Summe der Fehlerquadrate, $\sum_{i=1}^5 \big|p(x_i) - y_i\big|^2$, minimal wird. Fertige eine Skizze an!

18. Zeige, dass

$$G := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & A \end{pmatrix} : b \in \mathbb{K}^k,\ A \in \mathrm{GL}_k(\mathbb{K}) \right\}$$

eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_{k+1}(\mathbb{K})$ bildet. Zeige weiters, dass

$$G \cong \mathrm{Aff}(\mathbb{K}^k), \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & A \end{pmatrix} \leftrightarrow \big(v \mapsto Av + b\big)$$

ein Gruppenisomorphismus ist.

19. Zeige, dass eine Abbildung $\alpha\colon V \to W$ genau dann affin ist, wenn sie folgende Eigenschaft besitzt: Für je zwei Punkte $v_1, v_2 \in V$ und jedes $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt

$$\alpha\big(\lambda v_1 + (1-\lambda)v_2\big) = \lambda\alpha(v_1) + (1-\lambda)\alpha(v_2).$$

Hinweis: Gehe induktiv vor und verwende

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k = (1-\lambda_k)\left(\frac{\lambda_1}{1-\lambda_k}v_1 + \cdots + \frac{\lambda_{k-1}}{1-\lambda_k}v_{k-1}\right) + \lambda_k v_k$$

wobei $\lambda_i \in \mathbb{K}$ *und* $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$.

20. Zeige, dass eine Teilmenge A eines Vektorraums V genau dann einen affinen Teilraum bildet, wenn sie folgende Eigenschaft besitzt: Mit je zwei verschiedenen Punkten $a_1 \neq a_2 \in A$ liegt auch die Gerade durch a_1 und a_2 zur Gänze in A.

21. Zeige, dass eine Abbildung $\alpha\colon V \to W$ genau dann affin ist, wenn ihr Graph, $G_\alpha := \{(v, \alpha(v)) : v \in V\}$, einen affinen Teilraum von $V \times W$ bildet.

22. Zeige, dass die Punkte

$$a_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ein affines Koordinatensystem von $\mathbb{R}^2$ bilden. Bestimme die affinen und baryzentrischen Koordinaten der Punkte

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

vgl. Proposition VIII.1.27. Fertige eine Skizze an!

23 (Strahlensatz). Seien a_0, a_1, a_2 drei affin unabhängige Punkte eines Vektorraums V. Zeige, dass $g_1 := \langle a_0, a_1 \rangle_{\mathrm{aff}}$ und $g_2 := \langle a_0, a_2 \rangle_{\mathrm{aff}}$ zwei Geraden bilden, die sich nur in a_0 schneiden, $g_1 \cap g_2 = \{a_0\}$. Weiters sei $a_1' \in g_1$ mit $a_0 \neq a_1' \neq a_1$ und $a_2' \in g_2$ mit $a_0 \neq a_2' \neq a_2$. Zeige, dass eindeutig Skalare $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ mit

$$a_1' = \lambda_1 a_1 + (1 - \lambda_1) a_0 \qquad \text{und} \qquad a_2' = \lambda_2 a_2 + (1 - \lambda_2) a_0$$

existieren und, dass $0 \neq \lambda_i \neq 1$ gilt. Zeige, dass $h := \langle a_1, a_2 \rangle_{\mathrm{aff}}$ und $h' := \langle a_1', a_2' \rangle_{\mathrm{aff}}$ zwei verschiedene Geraden in V sind, für die

$$h \cap g_1 = \{a_1\}, \quad h \cap g_2 = \{a_2\}, \quad h' \cap g_1 = \{a_1'\} \quad \text{und} \quad h' \cap g_2 = \{a_2'\}$$

gilt. Fertige eine Skizze an! Beweise nun den Strahlensatz:

$$h \cap h' = \emptyset \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda_1 = \lambda_2.$$

24. Sei V ein endlich dimensionaler Euklidischer Vektorraum und $\sigma\colon V \to V$ eine Bewegung, sodass $\sigma^2 = \mathrm{id}_V$. Zeige, dass $A := \{v \in V : \sigma(v) = v\}$ einen nicht leeren affinen Teilraum bildet. Zeige weiters, dass σ mit der Spiegelung an A überein stimmt, vgl. Beispiel VIII.1.37.

25. Seien A und A' zwei affine Teilräume eines endlich dimensionalen Euklidischen Vektorraums V. Weiters seien $p, p' \in V$ zwei Punkte, sodass $d(A, p) = d(A', p')$. Zeige, dass eine Bewegung $\alpha\colon V \to V$ existiert, sodass $\alpha(A) = A'$ und $\alpha(p) = p'$.

26. Bestimme alle Mittelpunkte der quadratischen Funktionen, $Q_i\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$:

$$Q_1 \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = x^2 - y^2 + 6x - 4y + 4$$

$$Q_2 \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = x^2 + y^2 - z - 17$$

$$Q_3 \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 4yz + 2x + 6y + 8z + 5$$

27. Sei $Q\colon V \to \mathbb{K}$ eine quadratische Funktion und $\alpha \in \mathrm{Aff}(V)$. Zeige, dass α die Menge der Mittelpunkte von $Q \circ \alpha$ bijektiv auf die Menge der Mittelpunkte von Q abbildet. *Hinweis: Zeige* $\sigma_{\alpha(m)} = \alpha \circ \sigma_m \circ \alpha^{-1}$, *wobei* σ_m *die Spiegelung am Punkt* $m \in V$ *bezeichnet.*

28. Fertige eine Liste aller affinen Normalformen von Quadriken in $\mathbb{C}^3$ an, analog zu Beispiel VIII.2.11.

29. Zu jeder der folgenden Quadriken in $\mathbb{C}^2$ bestimme einen affinen Isomorphismus $\alpha_i\colon \mathbb{C}^2 \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}^2$, sodass $\alpha_i(E_i)$ Normalform hat, vgl. Beispiel VIII.2.11:

$$E_1 = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{C}^2 : x^2 - 4y^2 + 2x + 8y - 4 = 0 \right\}$$
$$E_2 = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{C}^2 : 2x^2 - 3y^2 - xy + 3x - 2y + 1 = 0 \right\}$$
$$E_3 = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{C}^2 : 4xy = 1 \right\}$$

Analog für folgende Quadrik in $\mathbb{C}^3$:

$$E_4 = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{C}^3 : x^2 - y^2 + 3z^2 + 2xz + 2\mathbf{i}yz + 2x + 4\mathbf{i}y + 12z + 14 = 0 \right\}.$$

30. Zu jeder der folgenden Quadriken in $\mathbb{R}^3$ bestimme einen affinen Isomorphismus $\alpha_i\colon \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^3$, sodass $\alpha_i(E_i)$ Normalform hat, vgl. Beispiel VIII.2.16:

$$E_1 = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2 + 2y^2 + z^2 + 4xy + 2yz + 4x + 6y + 4z + 1 = 0 \right\}$$
$$E_2 = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 5y^2 + z^2 + 4xy - 2yz - 2x - 2y - 3z + 2 = 0 \right\}$$
$$E_3 = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - y^2 - z^2 + 2xz + 2yz + 2x - 2y + 6z - 2 = 0 \right\}$$

31. Seien F und F' zwei Punkte in $\mathbb{R}^n$ und $2f := d(F, F')$. Weiters sei $a > f$. Zeige, dass

$$E := \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, F) + d(x, F') = 2a\}$$

eine Quadrik ist. Zeige, dass eine Bewegung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ existiert, die E auf das Rotationsellipsoid,

$$E' = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \left(\tfrac{x_1}{a}\right)^2 + \left(\tfrac{x_2}{b}\right)^2 + \cdots + \left(\tfrac{x_n}{b}\right)^2 = 1 \right\},$$

abbildet, wobei $b = \sqrt{a^2 - f^2}$.

32. Sei A eine affine Hyperebene in $\mathbb{R}^n$ und $F \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt, der nicht in A liegt. Zeige, dass

$$E := \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, A) = d(x, F)\}$$

eine Quadrik ist. Zeige, dass eine Bewegung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ existiert, die E auf das Rotationsparaboloid,

$$E' = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 = 4fx_n \right\},$$

abbildet, wobei $2f := d(A, F)$. Wie sieht die Situation aus, wenn $F \in A$?

33. Betrachte den Kegel

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 0 \right\}$$

und eine affine Isometrie $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = A\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) + b$, wobei $A \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$, $A^*A = I_2$, und $b \in \mathbb{R}^3$. Zeige, dass $\varphi^{-1}(K)$ eine Quadrik ist. Welche Quadriken in $\mathbb{R}^2$ lassen sich in dieser Form darstellen, für eine geeignete affine Isometrie φ?

34. Betrachte das einschalige Rotationshyperboloid

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : (\tfrac{x}{a})^2 + (\tfrac{x}{a})^2 - (\tfrac{z}{b})^2 = 1 \right\},$$

wobei $a, b > 0$. Zeige, dass die Gerade

$$g = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

in H liegt, d.h. $g \subseteq H$. Zeige weiters, dass wir durch Rotation der Geraden g um die z-Achse, ganz H erhalten, d.h.

$$H = \bigcup_{\theta \in \mathbb{R}} \rho_\theta(g), \qquad \rho_\theta\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \rho_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Gibt es noch weitere Geraden, die in H liegen?

35. Bestimme eine Bewegung, die die Quadrik

$$E = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 + 2xy + \sqrt{2}x + 3\sqrt{2}y - 2 = 0 \right\}$$

auf Normalform bringt.

36. Bestimme eine Bewegung, die die Quadrik

$$E = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 : 52x^2 + 73y^2 + 72xy + 80x + 190y + 25 = 0 \right\}$$

auf Normalform bringt.

37. Sei $a > b > 0$. Bestimme alle Bewegungen $\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die die Ellipse

$$E = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 : (\tfrac{x}{a})^2 + (\tfrac{y}{b})^2 = 1 \right\}$$

bewahren, $\alpha(E) = E$. *Hinweis: Zeige zunächst, dass jede solche Bewegung linear sein muss.*

38. Betrachte folgende drei Punkte in $\mathbb{RP}^3$:

$$P_1 = [0 : 1 : 2 : 3], \quad P_2 = [0 : 1 : 2 : 4], \quad P_3 = [1 : 1 : 1 : 1].$$

Zeige, dass $E := \langle P_1, P_2, P_3 \rangle_{\text{proj}}$ eine projektive Ebene ist und bestimme a_i, sodass

$$E = \left\{ [x_0 : x_1 : x_2 : x_3] \in \mathbb{RP}^3 : a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 \right\}.$$

39. Bestimme den Durchschnitt folgender drei projektiver Ebenen in $\mathbb{R}\mathrm{P}^3$:

$$E_1 = \{[x_0 : x_1 : x_2 : x_3] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^3 \mid x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$$
$$E_2 = \{[x_0 : x_1 : x_2 : x_3] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^3 \mid x_0 - x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$$
$$E_3 = \{[x_0 : x_1 : x_2 : x_3] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^3 \mid x_0 + 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0\}$$

40. Für $j = 0, \ldots, n$ betrachte die affine Hyperebene

$$A_j := e_j + \langle e_0, \ldots, e_{j-1}, e_{j+1}, \ldots, e_n \rangle$$

in $\mathbb{K}^{n+1}$ und die damit assoziierte Einbettung

$$\iota_j \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}\mathrm{P}^n, \qquad \iota_j(x_1, \ldots, x_n) := [x_1 : \cdots : x_j : 1 : x_{j+1} : \cdots : x_n],$$

wobei $e_j \in \mathbb{K}^{n+1}$ den j-ten Einheitsvektor bezeichnet. Zeige,

$$\mathbb{K}\mathrm{P}^n = \bigcup_{j=0}^{n} \iota_j(\mathbb{K}^n),$$

d.h. die Bilder der Einbettungen ι_j überdecken ganz $\mathbb{K}\mathrm{P}^n$.

41. Auf der Sphäre $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$ betrachte die Relation $x \sim y :\Leftrightarrow x = \pm y$. Zeige, dass dies eine Äquivalenzrelation bildet, und dass die Inklusion $S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine wohldefinierte Bijektion $S^n/\!\sim \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ induziert. Insbesonder erhalten wir so eine Identifikation $\mathbb{R}\mathrm{P}^2 = S^2/\!\sim$, d.h. die Punkte der projektiven Ebene $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ können mit Paaren von Antipodalpunkten auf S^2 identifiziert werden. Wie lassen sich die projektiven Geraden in diesem Bild beschreiben?

42. Zeige, dass jede Projektivität $\pi \colon \mathbb{C}\mathrm{P}^n \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ wenigstens einen Fixpunkt besitzt, d.h. es existiert $P \in \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ mit $\pi(P) = P$. Gib auch eine Projektivität $\pi \colon \mathbb{R}\mathrm{P}^1 \to \mathbb{R}\mathrm{P}^1$ an, die keinen einzigen Fixpunkt hat.

43. Bestimme die sechs Projektivitäten $\mathbb{K}\mathrm{P}^1 \to \mathbb{K}\mathrm{P}^1$ in der Form $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$, die die Punkte 0, 1, ∞ permutieren.

44. Bestimme das Doppelverhältnis folgender Punkte in $\mathbb{K}\mathrm{P}^1$:

$$P_0 = [1 : 2], \quad P_1 = [3 : 4], \quad P_2 = [5 : 6], \quad P_3 = [7 : 8].$$

45. Zeige, dass die Punkte

$$P_0 = [1 : 1 : 0], \quad P_1 = [0 : 1 : 1], \quad P_2 = [1 : 2 : 1], \quad P_3 = [1 : 0 : -1]$$

auf einer projektiven Gerade in $\mathbb{K}\mathrm{P}^2$ liegen, und bestimme ihr Doppelverhältnis.

46. Für vier Punkte P_0, P_1, P_2, P_3 auf einer projektiven Gerade zeige:

$$\mathrm{DV}(P_1, P_0, P_2, P_3) = \frac{1}{\mathrm{DV}(P_0, P_1, P_2, P_3)} = \mathrm{DV}(P_0, P_1, P_3, P_2)$$

sowie

$$\mathrm{DV}(P_2, P_1, P_0, P_3) = 1 - \mathrm{DV}(P_0, P_1, P_2, P_3) = \mathrm{DV}(P_0, P_3, P_2, P_1)$$

47. Sei $\sigma\colon \mathbb{C}\mathrm{P}^n \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ eine Projektivität mit $\sigma \circ \sigma = \mathrm{id}_{\mathbb{C}\mathrm{P}^n}$ und bezeichne die Menge der Fixpunkte mit $\mathrm{Fix}(\sigma) := \{p \in \mathbb{C}\mathrm{P}^n : \sigma(p) = p\}$. Zeige,

$$\mathrm{Fix}(\sigma) = P \cup Q,$$

wobei P und Q zwei projektive Teilräume in $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ bezeichnen, für die $P \cap Q = \emptyset$ und $\dim(P) + \dim(Q) = \dim(\mathbb{C}\mathrm{P}^n) - 1$ gilt. Zeige weiters, dass eine invariante Hyperebene $H \subseteq \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ existiert, d.h. $\sigma(H) = H$, sodass die Einschränkung $\sigma|_A\colon A \to A$ auf den affinen Teil, $A := \mathbb{C}\mathrm{P}^n \setminus H$, eine affine Spiegelung ist.

48. Sei $E \subseteq P(V)$ eine projektive Quadrik und $P \subseteq P(V)$ ein projektiver Teilraum. Zeige, dass $E \cap P$ eine projektive Quadrik in P ist.

49. Für jede der folgenden projektiven Quadriken bestimme eine Projektivität, die diese auf Normalform wie in Satz VIII.4.7 bringt:

(a) $E = \big\{[x : y : z] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^2 \bigm| x^2 + 5y^2 + 4z^2 + 4xy - 2xz = 0\big\}$
(b) $E = \big\{[x : y : z] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^2 \bigm| xy = 0\big\}$
(c) $E = \big\{[x : y : z : w] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^3 \bigm| x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2yz + 2zw = 0\big\}$

50. Für jede der folgenden affinen Quadriken $E_0 \subseteq \mathbb{R}^3$ bestimme eine projektive Quadrik in $E \subseteq \mathbb{R}\mathrm{P}^3$ mit affinem Teil E_0, d.h. so, dass $\iota^{-1}(E) = E_0$ gilt, wobei $\iota\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\mathrm{P}^3$, $\iota\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = [1 : x : y : z]$, die Standardeinbettung bezeichnet:

(a) $E_0 = \Big\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \bigm| x^2 + y^2 + z^2 = 1\Big\}$.
(b) $E_0 = \Big\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \bigm| x^2 + y^2 - z^2 = 1\Big\}$.
(c) $E_0 = \Big\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \bigm| x^2 + y^2 = z\Big\}$.
(d) $E_0 = \Big\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \bigm| x^2 = 0\Big\}$. (In diesem Fall ist E nicht eindeutig bestimmt)

Bestimme in jedem Beispiel auch die Menge (Quadrik) aller Fernpunkte von E.

51. Für endlich dimensionale Vektorräume $V_1, \dots, V_n$ zeige

$$\dim(V_1 \times \cdots \times V_n) = \dim(V_1) + \cdots + \dim(V_n).$$

52. Beweise Lemma IX.1.3, d.h. zeige, dass die direkte Summe $\bigoplus_{i \in I} V_i$ zusammen mit den kanonischen Inklusionen $\iota_i\colon V_i \to \bigoplus_{j \in I} V_j$ durch die universelle Eigenschaft, bis auf kanonischen Isomorphismus, eindeutig bestimmt ist.

53. Sei b_i, $i \in I$, eine Basis von V. Zeige, dass die linearen Abbildungen $\mathbb{K} \to V$, $\iota_i(\lambda) := \lambda b_i$, einen Isomorphismus

$$\bigoplus_{i \in I} \mathbb{K} \xrightarrow{\cong} V$$

induzieren.

54. Seien V_i Vektorräume, $i \in I$. Weiters bezeichnen $\pi_i\colon \prod_{j\in J} V_j \to V_i$ die kanonischen Projektionen und $\iota_i\colon V_i \to \bigoplus_{j\in I}$ die kanonischen Inklusionen. Zeige, dass eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung

$$\phi\colon \bigoplus_{i\in I} V_i \to \prod_{i\in I} V_i$$

existiert, sodass $\pi_i \circ \phi \circ \iota_j = \delta_{i,j}$, für alle $i, j \in I$. Zeige, dass ϕ für endliche Indexmengen I ein Isomorphismus ist. Zeige weiters, dass ϕ für unendliche Indexmengen zwar injektiv, aber i.A. nicht surjektiv ist.

55. Beweise Proposition IX.2.7, genauer: Für $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in L(V, V')$, $\psi, \psi_1, \psi_2 \in L(W, W')$, $\varphi' \in L(V', V'')$, $\psi' \in L(W', W'')$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt:
(a) $\mathrm{id}_V \otimes \mathrm{id}_W = \mathrm{id}_{V\otimes W}$
(b) $(\varphi' \circ \varphi) \otimes (\psi' \circ \psi) = (\varphi' \otimes \psi') \circ (\varphi \otimes \psi)$
(c) $(\varphi_1 + \varphi_2) \otimes \psi = \varphi_1 \otimes \psi + \varphi_2 \otimes \psi$
(d) $\varphi \otimes (\psi_1 + \psi_2) = \varphi \otimes \psi_1 + \varphi \otimes \psi_2$
(e) $(\lambda\varphi) \otimes \psi = \lambda(\varphi \otimes \psi) = \varphi \otimes (\lambda\psi)$
Dabei bezeichnet $\varphi \otimes \psi\colon V \otimes W \to V' \otimes W'$ das Tensorprodukt linearer Abbildungen.

56. Seien V und W zwei Vektorräume. Zeige, dass i.A. nicht jedes Element in $V \otimes W$ elementar, d.h. von der Form $v \otimes w$, ist. *Hinweis: Für einen endlich dimensionalen Vektorraum V gilt $V^* \otimes V = \mathrm{end}(V)$, und die elementaren Tensoren $\alpha \otimes w \in V^* \otimes V$, wobei $\alpha \in V^*$ und $w \in V$, entsprechen den linearen Abbildungen der Form $V \to V$, $v \mapsto \alpha(v)w$. Zeige, dass die identische Abbildung nicht von dieser Form ist, falls* $\dim(V) \geq 2$.

57. Sei $\varphi\colon V \to V$ und $\psi\colon W \to W$ zwei lineare Abbildungen zwischen endlich dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorräumen. Zeige

$$\mathrm{tr}\big(V \otimes W \xrightarrow{\varphi\otimes\psi} V \otimes W\big) = \mathrm{tr}(\varphi)\,\mathrm{tr}(\psi)$$

und

$$\det\big(V \otimes W \xrightarrow{\varphi\otimes\psi} V \otimes W\big) = \det(\varphi)^{\mathrm{tr}(\psi)} \det(\psi)^{\mathrm{tr}(\varphi)}.$$

Hinweis: Betrachte Basen von V und W, und berechne die Darstellung von $\varphi\otimes\psi$ bezüglich der induzierten Basis von $V \otimes W$.

58. Seien $\varphi\colon V \to W$ und $\psi\colon W \to U$ zwei lineare Abbildungen zwischen endlich dimensionalen Vekotrräumen über $\mathbb{K}$. Fassen wir $\varphi \in V^* \otimes W$ und $\psi \in W^* \otimes U$ auf, dann ist $\varphi \otimes \psi \in V^* \otimes W \otimes W^* \otimes U$. Bezeichnet $\mathrm{tr}\colon W \otimes W^* \to \mathbb{K}$ die kanonische Kontraktion, dann ist $(\mathrm{id}_{V^*} \otimes \mathrm{tr} \otimes \mathrm{id}_U)(\varphi\otimes\psi) \in V^* \otimes \mathbb{K} \otimes U = V^* \otimes U$. Zeige, dass dieses Element genau der Komposition $\psi \circ \varphi\colon V \to U$ entspricht.

59. Sei $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ ein Teilkörper, $\varphi\colon V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen endlich dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorräumen, $B = (b_1, \ldots, b_n)$ eine geordnete Basis von V und $C = (c_1, \ldots, c_m)$ eine geordnete Basis von W. Weiters bezeichnen

$B_{\mathbb{L}} = (b_1 \otimes 1, \dots, b_n \otimes 1)$ und $C_{\mathbb{L}} = (c_1 \otimes 1, \dots, c_n \otimes 1)$ die entsprechenden Basen der $\mathbb{L}$-Vektorräume $V \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{L}$ und $W \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{L}$. Für die Matrixdarstellung der $\mathbb{L}$-linearen Abbildung $\varphi \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{L}} \colon V \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{L} \to W \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{L}$ zeige:

$$[\varphi \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{L}}]_{C_{\mathbb{L}} B_{\mathbb{L}}} = [\varphi]_{CB}.$$

Schließe daraus:

$$\mathrm{tr}_{\mathbb{L}}\big(\varphi \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{L}}\big) = \mathrm{tr}_{\mathbb{K}}(\varphi) \qquad \text{und} \qquad \det_{\mathbb{L}}\big(\varphi \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{L}}\big) = \det_{\mathbb{K}}(\varphi).$$

60. Sei V ein komplexer Vektorraum, bezeichne $V_{\mathbb{R}}$ den zugrundeliegenden reellen Vektorraum und betrachte dessen Komplexifizierung, $V_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Konstruiere einen kanonischen $\mathbb{C}$-linearen Isomorphismus

$$V_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = V \oplus \bar{V},$$

wobei $\bar{V}$ den komplexen Vektorraum bezeichnet, den wir aus V erhalten indem wir die Skalarmultiplikation umdefinieren.

61. Sei $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ ein Teilkörper und V, W zwei Vektorräume über $\mathbb{K}$. Konstruiere kanonische Isomorphismen von $\mathbb{L}$-Vektorräumen:

$$(V \oplus W) \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{L} = (V \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{L}) \oplus (W \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{L})$$

und

$$(V \otimes W) \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{L} = (V \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{L}) \otimes_{\mathbb{L}} (W \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{L}).$$

62. Es bezeichne

$$D := \big\{ A \in M_{n\times n}(\mathbb{K}) \bigm| \forall i > j : A_{ij} = 0 \big\}$$

die Menge aller oberen Dreiecksmatrizen und

$$D^q := \big\{ A \in M_{n\times n}(\mathbb{K}) \bigm| \forall i \neq j - q : A_{ij} = 0 \big\}$$

die Teilmenge aller Matrizen, deren nicht-triviale Einträge in der q-ten Nebendiagonale liegen. Zeige, dass $D = \bigoplus_{q=0}^{n-1} D^q$ bezüglich Matrizenmultiplikation eine graduierte Algebra bildet.

63. Zeige $V \otimes V = \Lambda^2 V \oplus S^2 V$, für jeden Vektorraum V.

64. Sei $\varphi \colon V \to V$ linear und $\dim(V) = n$. Zeige:

$$\Lambda^n \varphi = \det(\varphi)\, \mathrm{id}_{\Lambda^n}.$$

Hinweis: in Beispiel IX.5.6 haben wir dies bereits für diagonalisierbare φ gezeigt.

65. Sei $\varphi \colon V \to V$ linear und $\dim(V) = n$. Zeige:

$$\det(\varphi + z\, \mathrm{id}_V) = \sum_{q=0}^{n} \mathrm{tr}\big(\Lambda^q \varphi\big) z^{n-q}.$$

Hinweis: in Beispiel IX.5.7 haben wir dies bereits für diagonalisierbare φ gezeigt.

66. Sei $v \in V$. Zeige, dass $i_v \colon \Lambda^q V^* \to \Lambda^{q-1} V^*$,

$$(i_v\alpha)(v_2, \ldots, v_q) := \alpha(v, v_2, \ldots, v_q),$$

eine graduierte Derivation ist, d.h. es gilt

$$i_v(\alpha \wedge \beta) = (i_v\alpha) \wedge \beta + (-1)^{pq} \alpha \wedge i_v\beta,$$

für alle $\alpha \in \Lambda^p V^*$ und $\beta \in \Lambda^q V^*$.