Name	Matrikelnummer	Studienkennzahl

Prüfung zu

Lineare Algebra und Geometrie 2

Wintersemester 2012/13, LVN 250021

am 8. Februar 2013, 2-stündig

1 (5 Punkte). Zeige, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -6 & 0 \\ -6 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 36 \end{pmatrix}$$

positiv ist, und bestimme $\sqrt{A}$.

2 (3 Punkte). Bestimme die Polarzerlegung der Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

3 (5 Punkte). Seien F_1 und F_2 zwei Punkte in $\mathbb{R}^n$ mit Abstand $2f := d(F_1, F_2)$. Weiters sei $a > f$. Zeige, dass

$$E := \{P \in \mathbb{R}^n : d(F_1, P) + d(P, F_2) = 2a\}$$

eine affine Quadrik bildet.

4 (5 Punkte). Bestimme eine Bewegung $\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, die die Quadrik

$$E = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 5x^2 - 3y^2 + 3z^2 - 8yz + 10x + 5 = 0 \right\}$$

auf Normalform bringt. Um welchen Typ handelt es sich?

5 (3 Punkte). Betrachte die beiden projektiven Hyperebenen

$$E := \{[x_0 : x_1 : x_2 : x_3] \in \mathbb{RP}^3 : x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = 0\}, \quad \text{und}$$
$$F := \{[x_0 : x_1 : x_2 : x_3] \in \mathbb{RP}^3 : x_0 + 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0\}.$$

Bestimme eine Projektivität $\pi\colon \mathbb{RP}^3 \to \mathbb{RP}^3$, sodass $\pi(F) = E$.

6 (2 Punkte). Bestimme die Dimension, des von den Punkten

$$[1 : 2 : 3 : 4 : 5], \quad [1 : 1 : 1 : 1 : 1], \quad [5 : 4 : 3 : 2 : 1],$$
$$[1 : -1 : 0 : 1 : -1], \quad [2 : 1 : 3 : 5 : 4]$$

aufgespannten projektiven Teilraums in $\mathbb{RP}^4$.

7 (5 Punkte)**.** Seien P und P' zwei projektive Teilräume eines projektiven Raums $P(V)$. Formuliere und beweise die Dimensionsformel, die die Dimensionen von P, P', $P \cap P'$ und $\langle P \cup P' \rangle_{\text{proj}}$ in Beziehung bringt.

8 (2 Punkte)**.** Was verstehen wir unter dem Doppelverhältnis von vier Punkten auf einer projektiven Geraden?

9 (5 Punkte)**.** Seien $P_0, \dots, P_{n+1}$ und $P'_0, \dots, P'_{n+1}$ projektive Bezugssysteme zweier projektiver Räume $P(V)$ und $P(V')$. Zeige, dass eine eindeutige projektive Abbildung $\pi \colon P(V) \to P(V')$ existiert, sodass $\pi(P_i) = P'_i$ für alle $i = 0, \dots, n+1$.

10 (3 Punkte)**.** Bestimme eine Projektivität $\pi \colon \mathbb{R}\mathrm{P}^3 \to \mathbb{R}\mathrm{P}^3$, die die Quadrik

$$E = \left\{ [x : y : z : w] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^3 \;\middle|\; x^2 + 2y^2 - 2w^2 + 2xy + 2yz - 2zw = 0 \right\}$$

auf Normalform bringt.

11 (2 Punkte)**.** Bestimme alle Fernpunkte der Quadrik

$$\left\{ [x : y : z] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 - z^2 = 0 \right\}$$

bezüglich der Standardeinbettung $\iota \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\mathrm{P}^2$, $\iota \left(\begin{smallmatrix} y \\ z \end{smallmatrix} \right) = [1 : y : z]$.

Punkte:	0–20	$20\frac{1}{2}$–25	$25\frac{1}{2}$–30	$30\frac{1}{2}$–35	$35\frac{1}{2}$–40
Note:	5	4	3	2	1

Punkte: **Beurteilung:**

Lösungen

1. Da A symmetrisch ist, und weil alle Hauptminoren positiv sind, ist A eine positive Matrix. Es gilt $A = UDU^{-1} = UDU^t$ wobei

$$D = 4\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Somit

$$\begin{aligned}\sqrt{A} = U\sqrt{D}U^{-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

2. Es gilt

$$A^*A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix}$$

Die Polarzerlegung von A ist daher $A = UR$, wobei

$$R := \sqrt{A^*A} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} > 0 \quad \text{und} \quad U := AR^{-1} = \begin{pmatrix} 3/5 & 0 & -4/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix} \in U_3.$$

3. Da eine Bewegung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ existiert, die F_1 und F_2 auf $(-f, 0)$ bzw. $(f, 0)$ abbildet, dürfen wir o.B.d.A. $F_1 = (-f, 0)$ und $F_2 = (f, 0)$ annehmen. Bezeichnen wir $P = (x, y)$, wobei $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}^{n-1}$, dann ist E also durch folgende Gleichung beschrieben:

$$\sqrt{(x-f)^2 + \|y\|^2} + \sqrt{(x+f)^2 + \|y\|^2} = 2a \tag{1}$$

Schreiben wir dies in der Form

$$\sqrt{(x-f)^2 + \|y\|^2} = 2a - \sqrt{(x+f)^2 + \|y\|^2}$$

und quadrieren beide Seiten erhalten wir

$$(x-f)^2 + \|y\|^2 = 4a^2 + (x+f)^2 + \|y\|^2 - 4a\sqrt{(x+f)^2 + \|y\|^2}$$

also

$$\sqrt{(x+f)^2 + \|y\|^2} = a + \frac{fx}{a}.$$

Erneutes Quadrieren liefert

$$(x+f)^2 + \|y\|^2 = a^2 + \frac{f^2x^2}{a^2} + 2fx,$$

oder äquivalent:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{\|y\|^2}{a^2 - f^2} = 1.$$

Umgekehrt erfüllt jede Lösung dieser Gleichung auch (1). Somit kann E durch eine quadratische Gleichung beschrieben werden und ist daher eine Quadrik.

4. Wir diagonalisieren zunächst den quadratischen Teil,

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} 5 & & \\ & 5 & \\ & & -5 \end{pmatrix} U^{-1}, \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ 0 & -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix},$$

wobei

$$U^{-1} = U^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 0 & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Es gilt daher:

$$5x^2 - 3y^2 + 3z^2 - 8yz = 5x^2 + 5\big(y/\sqrt{5} - 2z/\sqrt{5}\big)^2 - 5\big(2y/\sqrt{5} + z/\sqrt{5}\big)^2$$

also

$$\begin{aligned} &5x^2 - 3y^2 + 3z^2 - 8yz + 10x + 5 \\ &\qquad = 5(x+1)^2 + 5\big(y/\sqrt{5} - 2z/\sqrt{5}\big)^2 - 5\big(2y/\sqrt{5} + z/\sqrt{5}\big)^2 \\ &\qquad = 5\Big\{(\underbrace{x+1}_{\tilde{x}})^2 + (\underbrace{y/\sqrt{5} - 2z/\sqrt{5}}_{\tilde{y}})^2 - (\underbrace{2y/\sqrt{5} + z/\sqrt{5}}_{\tilde{z}})^2\Big\} \end{aligned}$$

Die Bewegung $\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\alpha\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x+1 \\ y/\sqrt{5} - 2z/\sqrt{5} \\ 2y/\sqrt{5} + z/\sqrt{5} \end{pmatrix}$, bildet daher E auf den Kegel $\alpha(E) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 : \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 - \tilde{z}^2 = 0 \right\}$ ab.

5. Ist A eine invertierbar (4×4)-Matrix, sodass

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$

dann erfüllt die damit assoziierte Projektivität, $\pi\colon \mathbb{RP}^3 \to \mathbb{RP}^3$, $\pi([x]) = [Ax]$, offensichtlich $\pi(F) = E$, denn für $x = (x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4$ gilt:

$$\begin{aligned} \pi([x]) \in E \Leftrightarrow [Ax] \in E \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} Ax = 0 \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} x = 0 \Leftrightarrow [x] \in F. \end{aligned}$$

Eine solche Matrix A lässt sich sofort angeben, etwa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Die Vektoren

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}5\\4\\3\\2\\1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\\-1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}2\\1\\3\\5\\4\end{pmatrix}$$

spannen einen 3-dimensionalen linearen Teilraum in $\mathbb{R}^5$ auf. Die Dimension des projektiven Teilraums ist daher 2.

7. siehe Skriptum, Proposition VIII.3.5.

8. siehe Skriptum, Definition VIII.3.29.

9. siehe Skriptum, Proposition VIII.3.27(b).

10. Ergänzen auf vollständige Quadrate liefert:

$$x^2 + 2y^2 - 2w^2 + 2xy + 2yz - 2zw = (x+y)^2 + (y+z)^2 - (z+w)^2 - w^2$$

Die Projektivität, $\pi\colon \mathbb{RP}^3 \to \mathbb{RP}^3$, $\pi([x:y:z:w] := [x+y : y+z : z+w : w]$, erfüllt daher

$$\pi(E) = \bigl\{[\tilde{x} : \tilde{y} : \tilde{z} : \tilde{w}] \in \mathbb{RP}^3 \bigm| \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 - \tilde{z}^2 - \tilde{w}^2 = 0\bigr\},$$

bildet also E auf Normalform ab.

11. Es liegen zwei Fernpunkte auf der Quadrik, nämlich $[0:1:1]$ und $[0:1:-1]$.