Name	Matrikelnummer	Studienkennzahl

Prüfung zu

Lineare Algebra und Geometrie 2

Wintersemester 2012/13, LVN 250021

am 15. März 2013, 2-stündig

1 (5 Punkte)**.** Zeige, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

positiv ist, und bestimme $\sqrt{A}$.

2 (4 Punkte)**.** Seien $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ zwei kommutierende semipositive Matrizen, d.h. $A \geq 0$, $B \geq 0$ und $AB = BA$. Zeige, $AB \geq 0$ und $\sqrt{AB} = \sqrt{A}\sqrt{B} = \sqrt{B}\sqrt{A}$.

3 (3 Punkte)**.** Bestimme die Polarzerlegung der Matrix

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

4 (5 Punkte)**.** Bestimme eine Bewegung $\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, die die Quadrik

$$E = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 5x^2 - 3y^2 + 3z^2 - 8yz + 10x = 0 \right\}$$

auf Normalform bringt. Um welchen Typ handelt es sich?

5 (5 Punkte)**.** Seien $P_0, \dots, P_{n+1}$ und $P'_0, \dots, P'_{n+1}$ projektive Bezugssysteme zweier projektiver Räume $P(V)$ und $P(V')$. Zeige, dass eine eindeutige projektive Abbildung $\pi\colon P(V) \to P(V')$ existiert, sodass $\pi(P_i) = P'_i$ für alle $i = 0, \dots, n+1$.

6 (2 Punkte)**.** Seien P_0, P_1, P_2, P_3 vier verschiedene Punkte einer projektiven Geraden. Zeige, dass für die Doppelverhältnisse folgende Relation gilt:

$$\mathrm{DV}(P_0, P_1, P_2, P_3) = 1 - \mathrm{DV}(P_2, P_1, P_0, P_3).$$

7 (3 Punkte)**.** Was verstehen wir unter dem Tensorprodukt zweier Vektorräume?

8 (5 Punkte)**.** Seien V und W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume, $b_1, \dots, b_n$ eine Basis von V und $c_1, \dots, c_m$ eine Basis von W. Zeige, dass $b_i \otimes c_j$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$, eine Basis von $V \otimes W$ bildet.

9 (5 Punkte)**.** Sei $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ ein Teilkörper und V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Erkläre wie $V \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{L}$ zu einem $\mathbb{L}$-Vektorraum gemacht wird. Die Vektorraumaxiome sind nicht zu verifizieren, gehe aber darauf ein, wie die Multiplikation mit Skalaren in $\mathbb{L}$ erklärt ist und warum dies wohldefiniert ist. Für jede $\mathbb{K}$-lineare Abbildung $\varphi\colon V \to W$ zeige, dass $\varphi \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{L}}\colon V \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{L} \to W \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{L}$ eine $\mathbb{L}$-lineare Abbildung ist.

10 (3 Punkte)**.** Sei $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ ein Teilkörper, V ein endlich dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K}$, und $\varphi\colon V \to V$ linear. Zeige $\mathrm{tr}_{\mathbb{L}}\big(\varphi \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{L}}\big) = \mathrm{tr}_{\mathbb{K}}(\varphi)$.

Punkte:	0–20	$20\frac{1}{2}$–25	$25\frac{1}{2}$–30	$30\frac{1}{2}$–35	$35\frac{1}{2}$–40
Note:	5	4	3	2	1

Punkte: **Beurteilung:**

Lösungen

1. Da A symmetrisch ist, und weil alle Hauptminoren positiv sind, ist A eine positive Matrix. Es gilt $A = UDU^{-1} = UDU^t$ wobei

$$D = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Somit

$$\sqrt{A} = U\sqrt{D}U^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Da $AB = BA$ gilt $\sqrt{A}B = B\sqrt{A}$ und $\sqrt{A}\sqrt{B} = \sqrt{B}\sqrt{A}$, siehe Satz VII.5.6(l) im Skriptum. Wir erhalten $(\sqrt{A}\sqrt{B})^2 = \sqrt{A}\sqrt{B}\sqrt{A}\sqrt{B} = \sqrt{A}\sqrt{A}\sqrt{B}\sqrt{B} = AB$ aber auch $AB = \sqrt{A}\sqrt{AB} = \sqrt{AB}\sqrt{A} = \sqrt{AB}\sqrt{A}^* \geq 0$, also $\sqrt{AB} = \sqrt{A}\sqrt{B}$.

3. Es gilt

$$A^*A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix}$$

Die Polarzerlegung von A ist daher $A = UR$, wobei

$$R := \sqrt{A^*A} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} > 0 \quad \text{und} \quad U := AR^{-1} = \begin{pmatrix} 4/5 & 0 & 3/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3/5 & 0 & 4/5 \end{pmatrix} \in U_3.$$

4. Wir diagonalisieren zunächst den quadratischen Teil,

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} 5 & & \\ & 5 & \\ & & -5 \end{pmatrix} U^{-1}, \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ 0 & -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix},$$

wobei

$$U^{-1} = U^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 0 & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Es gilt daher:

$$5x^2 - 3y^2 + 3z^2 - 8yz = 5x^2 + 5\big(y/\sqrt{5} - 2z/\sqrt{5}\big)^2 - 5\big(2y/\sqrt{5} + z/\sqrt{5}\big)^2$$

also

$$\begin{aligned} &5x^2 - 3y^2 + 3z^2 - 8yz + 10x \\ &\qquad = 5(x+1)^2 + 5\big(y/\sqrt{5} - 2z/\sqrt{5}\big)^2 - 5\big(2y/\sqrt{5} + z/\sqrt{5}\big)^2 - 5 \\ &\qquad = 5\Big\{(\underbrace{x+1}_{\tilde{x}})^2 + (\underbrace{y/\sqrt{5} - 2z/\sqrt{5}}_{\tilde{y}})^2 - (\underbrace{2y/\sqrt{5} + z/\sqrt{5}}_{\tilde{z}})^2 - 1\Big\} \end{aligned}$$

Die Bewegung

$$\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad \alpha\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+1 \\ y/\sqrt{5} - 2z/\sqrt{5} \\ 2y/\sqrt{5} + z/\sqrt{5} \end{pmatrix},$$

bildet daher E auf das einschalige Rotationshyperboloid

$$\alpha(E) = \Big\{ \left(\begin{smallmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 : \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 - \tilde{z}^2 = 1 \Big\}$$

ab.

5. Siehe Proposition VIII.3.27(b) im Skriptum.

6. Bezeichne G die projektive Gerade, die die Punkte $P_0, \dots, P_3$ enthält. Sei $\pi\colon \mathbb{K}\mathrm{P}^1 \to G$ die eindeutig bestimmte projektive Abbildung, sodass $\pi(0) = P_0$, $\pi(\infty) = P_1$, $\pi(1) = P_2$. Setzen wir $x := \mathrm{DV}(P_0, P_1, P_2, P_3)$ dann gilt nach Definition des Doppelverhältnisses, $\pi(x) = P_3$. Betrachte die Projektivität $\lambda\colon \mathbb{K}\mathrm{P}^1 \to \mathbb{K}\mathrm{P}^1$, $\lambda(\xi) = 1 - \xi$ und $\tilde{\pi} := \pi \circ \lambda\colon \mathbb{K}\mathrm{P}^1 \to G$. Es gilt dann $\tilde{\pi}(0) = \pi(1) = P_2$, $\tilde{\pi}(\infty) = \pi(\infty) = P_1$, $\tilde{\pi}(1) = \pi(0) = P_0$ und $\tilde{\pi}(1 - x) = \pi(x) = P_3$, woraus wir $\mathrm{DV}(P_2, P_1, P_0, P_3) = 1 - x = 1 - \mathrm{DV}(P_0, P_1, P_2, P_3)$ schließen.

7. Siehe Definition IX.2.3 im Skriptum.

8. Siehe Proposition IX.2.5 im Skriptum.

9. Siehe Abschnitt IX.3 im Skriptum.

10. Sei $B = (b_1, \dots, b_n)$ eine Basis des $\mathbb{K}$-Vektorraums V und $A := [\varphi]_{BB}$ die Matrix von φ bezüglich B. Dann ist $\tilde{B} := (b_1 \otimes 1, \dots, b_n \otimes 1)$ eine Basis des $\mathbb{L}$-Vektorraums $V \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{L}$ und es gilt

$$(\varphi \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{L}})(b_i \otimes 1) = \varphi(b_i) \otimes 1 = \Big(\sum_j A_{ij} b_j\Big) \otimes 1 = \sum_j A_{ij}(b_j \otimes 1).$$

Dies zeigt

$$[\varphi \otimes_{\mathbb{K}} \mathrm{id}_{\mathbb{L}}]_{\tilde{B}\tilde{B}} = A = [\varphi]_{BB} \in M_{n\times n}(\mathbb{K}) \subseteq M_{n\times n}(\mathbb{L}),$$

und wir erhalten $\mathrm{tr}_{\mathbb{L}}(\varphi \otimes_{\mathbb{K}} \mathrm{id}_{\mathbb{L}}) = \mathrm{tr}_{\mathbb{L}}(A) = \mathrm{tr}_{\mathbb{K}}(A) = \mathrm{tr}_{\mathbb{K}}(\varphi)$.