Name	Matrikelnummer	Studienkennzahl

Prüfung zu

Lineare Algebra und Geometrie 2

Wintersemester 2012/13, LVN 250021

am 3. Mai 2013, 2-stündig

1 (3 Punkte)**.** Zeige, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3\mathbf{i} \\ 3\mathbf{i} & 5 \end{pmatrix}$$

positiv ist, und bestimme $\sqrt{A}$.

2 (3 Punkte)**.** Bestimme die Polarzerlegung der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3 (5 Punkte)**.** Bestimme eine Bewegung $\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, die die Quadrik

$$E = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix} \right) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 5x^2 + 5y^2 + 2z^2 + 6xy + 4z = 6 \right\}$$

auf Normalform bringt. Um welchen Typ handelt es sich?

4 (2 Punkte)**.** Was verstehen wir unter einem projektiven Raum und was ist eine projektive Abbildung?

5 (5 Punkte)**.** Seien $P_0, \dots, P_{n+1}$ und $P'_0, \dots, P'_{n+1}$ projektive Bezugssysteme zweier projektiver Räume $P(V)$ und $P(V')$. Zeige, dass eine eindeutige projektive Abbildung $\pi\colon P(V) \to P(V')$ existiert, sodass $\pi(P_i) = P'_i$ für alle $i = 0, \dots, n+1$.

6 (2 Punkte)**.** Was verstehen wir unter dem Doppelverhältnis von vier verschiedenen Punkten einer projektiven Geraden?

7 (5 Punkte)**.** Seien $P_0 = [x_0 : y_0]$, $P_1 = [x_1 : y_1]$, $P_2 = [x_2 : y_2]$ und $P_3 = [x_3 : y_3]$ vier verschiedene Punkte in $\mathbb{KP}^1$. Zeige

$$\mathrm{DV}(P_0, P_1, P_2, P_3) = \frac{\left|\begin{smallmatrix} x_0 & x_3 \\ y_0 & y_3 \end{smallmatrix}\right|}{\left|\begin{smallmatrix} x_0 & x_2 \\ y_0 & y_2 \end{smallmatrix}\right|} : \frac{\left|\begin{smallmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{smallmatrix}\right|}{\left|\begin{smallmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{smallmatrix}\right|}$$

8 (2 Punkte)**.** Was verstehen wir unter dem Tensorprodukt zweier Vektorräume?

9 (5 Punkte)**.** Seien V und W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume, $b_1, \ldots, b_n$ eine Basis von V und $c_1, \ldots, c_m$ eine Basis von W. Zeige, dass $b_i \otimes c_j$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$, eine Basis von $V \otimes W$ bildet und berechne $\dim(V \otimes W)$.

10 (3 Punkte)**.** Seien V und W zwei endlich dimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume. Zeige, dass die bilineare Abbildung

$$\phi\colon V^* \times W \to L(V, W), \qquad \phi(\alpha, w)(v) := \alpha(v)w,$$

einen Isomorphismus $V^* \otimes W = L(V, W)$ induziert, $\alpha \in V^*$, $w \in W$, $v \in V$.

11 (5 Punkte)**.** Sei $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ ein Teilkörper und V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Erkläre wie $V \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{L}$ zu einem $\mathbb{L}$-Vektorraum gemacht wird. Die Vektorraumaxiome sind nicht zu verifizieren, gehe aber darauf ein, wie die Multiplikation mit Skalaren in $\mathbb{L}$ erklärt ist und warum dies wohldefiniert ist. Für jede $\mathbb{K}$-lineare Abbildung $\varphi\colon V \to W$ zeige, dass $\varphi \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{L}}\colon V \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{L} \to W \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{L}$ eine $\mathbb{L}$-lineare Abbildung ist.

Punkte:	0–20	$20\frac{1}{2}$–25	$25\frac{1}{2}$–30	$30\frac{1}{2}$–35	$35\frac{1}{2}$–40
Note:	5	4	3	2	1

Punkte: **Beurteilung:**

Lösungen

1. Es gilt $A = UDU^{-1} = UDU^*$ wobei

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -\mathbf{i} \\ -\mathbf{i} & 1 \end{pmatrix}.$$

Somit

$$\sqrt{A} = U\sqrt{D}U^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -\mathbf{i} \\ -\mathbf{i} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{8} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3 & -\mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Es gilt

$$A^t A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Die Polarzerlegung von A ist daher $A = UR$, wobei

$$R := \sqrt{A^t A} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} \end{pmatrix} > 0$$

und

$$U := AR^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \in O_3.$$

3. Wir diagonalisieren zunächst den quadratischen Teil,

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 8 & \\ & & 2 \end{pmatrix} U^{-1}, \qquad U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix},$$

wobei

$$U^{-1} = U^t = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Es gilt daher:

$$5x^2 + 5y^2 + 2z^2 + 6xy = 2\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)^2 + 8\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^2 + 2z^2$$

also

$$5x^2 + 5y^2 + 2z^2 + 6xy + 4z - 6 = 2\Bigl(\underbrace{\frac{x-y}{\sqrt{2}}}_{\tilde{x}}\Bigr)^2 + 8\Bigl(\underbrace{\frac{x+y}{\sqrt{2}}}_{\tilde{y}}\Bigr)^2 + 2(\underbrace{z+1}_{\tilde{z}})^2 - 8$$

Die Bewegung

$$\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad \alpha\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x-y)/\sqrt{2} \\ (x+y)/\sqrt{2} \\ z+1 \end{pmatrix},$$

bildet daher E auf das Ellipsoid

$$\begin{aligned} \alpha(E) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 : 2\tilde{x}^2 + 8\tilde{y}^2 + 2\tilde{z}^2 = 8 \right\} \\ = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 : \left(\tfrac{\tilde{x}}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{\tilde{y}}{1}\right)^2 + \left(\tfrac{\tilde{z}}{2}\right)^2 = 1 \right\} \end{aligned}$$

ab.

4. siehe die Definitionen VIII.3.1 und VIII.3.15 im Skriptum.

5. siehe Proposition VIII.3.27(b) im Skriptum.

6. siehe Definition VIII.3.29 im Skriptum.

7. siehe Proposition VIII.3.34 im Skriptum.

8. siehe Definition IX.2.3 im Skriptum.

9. siehe Proposition IX.2.5 im Skriptum.

10. siehe Proposition IX.2.10 im Skriptum.

11. siehe Abschnitt IX.3 im Skriptum.