Name	Matrikelnummer	Studienkennzahl

Prüfung zu

Lineare Algebra und Geometrie 2

Wintersemester 2012/13, LVN 250021

am 14. Juni 2013, 2-stündig

1 (2 Punkte)**.** Was verstehen wir unter der Polarzerlegung einer komplexen Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$? Wann ist diese Polarzerlegung eindeutig?

2 (5 Punkte)**.** Bestimme die Polarzerlegung der komplexen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2\mathbf{i} & 3\mathbf{i} & & \\ 2 & -3 & & \\ & & 1 & 2 \\ & & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

3 (3 Punkte)**.** Sei A ein k-dimensionaler affiner Teilraum eines Vektorraums V und $a_0, \dots, a_k \in A$. Formuliere mindestens drei verschiedene Charakterisierungen von: "Die Punkte $a_0, \dots, a_k$ bilden ein affines Koordinatensystem von A."

4 (3 Punkte)**.** Bestimme eine affine Abbildung $\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, sodass

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \quad \alpha\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \varphi\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}.$$

Genauer, bestimme $A \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$ und $b \in \mathbb{R}^3$, sodass $\alpha(x) = Ax + b$. Wieviele solche Abbildungen α gibt es?

5 (4 Punkte)**.**

(a) Was verstehen wir unter einem affinen Teilraum eines Vektorraums?
(b) Was verstehen wir unter der Dimension eines affinen Teilraums?
(c) Was verstehen wir unter der affinen Hülle einer Teilmenge eines Vektorraums?
(d) Formuliere die Dimensionsformel für zwei affine Teilräume eines Vektorraums? Beweis ist nicht verlangt, formuliere aber alle Voraussetzungen!

6 (2 Punkte)**.** Was verstehen wir unter einer affinen Quadrik?

7 (3 Punkte)**.** Bestimme einen affinen Isomorphismus, $\alpha\colon \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^2$, der die Quadrik

$$E = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 + 2xy + 4x + 6y + 10 = 0 \right\}$$

auf Normalform bringt. Um welchen Typ handelt es sich?

8 (2 Punkte)**.** Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum. Was verstehen wir unter dem projektiven Raum $P(V)$, und was ist eine Projektivität, $\pi\colon P(V) \to P(V)$?

9 (2 Punkte)**.** Erkläre den Zusammenhang zwischen Projektivitäten $\pi\colon \mathbb{R}\mathrm{P}^1 \to \mathbb{R}\mathrm{P}^1$ und den (nicht überall definierten) Abbildungen

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d},$$

wobei $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und $ad - bc \neq 0$.

10 (4 Punkte)**.** Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum. Was verstehen wir unter einem projektiven Bezugssystem des projektiven Raums $P(V)$? Bilden die Punkte

$$P_0 = [1:0:0], \quad P_1 = [1:2:0], \quad P_2 = [1:2:3], \quad P_3 = [2:4:3]$$

ein projektives Bezugssystem von $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$? Begründe die Antwort!

11 (2 Punkte)**.** Was verstehen wir unter dem Tensorprodukt zweier Vektorräume?

12 (5 Punkte)**.** Seien V und W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume, $b_1, \dots, b_n$ eine Basis von V und $c_1, \dots, c_m$ eine Basis von W. Zeige, dass $b_i \otimes c_j$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$, eine Basis von $V \otimes W$ bildet und berechne $\dim(V \otimes W)$.

13 (3 Punkte)**.** Für jede Menge X bezeichne $F_c(X)$ den Vektorraum aller Funktionen $f\colon X \to \mathbb{R}$ mit endlichem Träger, d.h. $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$ ist endlich. Für je zwei Mengen X und Y existiert ein kanonischer Isomorphismus

$$F_c(X) \otimes F_c(Y) \cong F_c(X \times Y).$$

Gib eine Definition dieses Isomorphismus, und erkläre warum es sich tatsächlich um einen Isomorphismus handelt.

Punkte:	0–20	$20\frac{1}{2}$–25	$25\frac{1}{2}$–30	$30\frac{1}{2}$–35	$35\frac{1}{2}$–40
Note:	5	4	3	2	1

Punkte: **Beurteilung:**

Lösungen

1. vgl. Korollar VII.5.11 im Skriptum.

2.

$$A^*A = \begin{pmatrix} -2\mathbf{i} & 2 & & \\ -3\mathbf{i} & -3 & & \\ & & 1 & -2 \\ & & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\mathbf{i} & 3\mathbf{i} & & \\ 2 & -3 & & \\ & & 1 & 2 \\ & & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & & & \\ & 18 & & \\ & & 5 & 4 \\ & & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$R = \sqrt{A^*A} = \begin{pmatrix} 8 & & & \\ & 18 & & \\ & & 5 & 4 \\ & & 4 & 5 \end{pmatrix}^{1/2} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & & & \\ & 3\sqrt{2} & & \\ & & 2 & 1 \\ & & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$U = AR^{-1} = \begin{pmatrix} 2\mathbf{i} & 3\mathbf{i} & & \\ 2 & -3 & & \\ & & 1 & 2 \\ & & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} & & & \\ & \frac{1}{3\sqrt{2}} & & \\ & & 2/3 & -1/3 \\ & & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2}} & \frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2}} & & \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & & \\ & & 0 & 1 \\ & & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Die gesuchte Polarzerlegung ist $A = UR$, wobei $R \geq 0$ und $U \in \mathrm{U}_4$ wie oben.

3. siehe Definition VIII.1.28 bzw. Proposition VIII.1.27 im Skriptum.

4. Es gibt genau eine solche affine Abbildung, nämlich:

$$\alpha(x) = Ax + b = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

5. siehe Definitionen VIII.1.6, VIII.1.14 und VIII.1.19, sowie Beispiel VIII.1.24 im Skriptum.

6. Erster Absatz in Abschnitt VIII.2 des Skriptums.

7. Durch Ergänzen auf vollständige Quadrate erhalten wir:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 2xy + 4x + 6y + 10 &= (x+y)^2 + 4x + 6y + 10 \\ &= (x+y+2)^2 + 2y + 6 \\ &= \tilde{x}^2 - \tilde{y} \end{aligned}$$

Es ist daher, $\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+2 \\ -2y-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

ein affiner Isomorphismus und $\alpha(E) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 : \tilde{x}^2 = \tilde{y} \right\}$. Es handelt sich daher um eine Parabel.

8. siehe die Definitionen VIII.3.1 und VIII.3.15 im Skriptum.

9. siehe siehe Seite 289 im Skriptum.

10. Zur Definition projektiver Bezugssysteme siehe Definition VIII.3.23. Die Punkte $P_0, \ldots, P_3$ bilden kein projektives Bezugssystem, denn die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ bilden keine Basis von $\mathbb{R}^3$, vgl. Lemma VIII.3.24.

11. siehe Definition IX.2.3 im Skriptum.

12. siehe Proposition IX.2.5 im Skriptum.

13. siehe Beispiel IX.2.12 im Skriptum.