Name	Matrikelnummer	Studienkennzahl

Prüfung zu

Lineare Algebra und Geometrie 2

Wintersemester 2012/13, LVN 250021

am 11. Oktober 2013, 2-stündig

1 (5 Punkte). Bestimme die Polarzerlegung der Matrix

$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 11 & 7 \end{pmatrix}.$$

2 (5 Punkte). Bestimme eine Bewegung $\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, die die Quadrik

$$E = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; y^2 - z^2 + 4xy - 4xz - 6x + 4y + 2z + 8 = 0 \right\}$$

auf Normalform bringt. Um welchen Typ handelt es sich?

3 (3 Punkte). Sei A ein k-dimensionaler affiner Teilraum eines Vektorraums V und $a_0, \dots, a_k \in A$. Formuliere mindestens drei verschiedene Charakterisierungen von: "Die Punkte $a_0, \dots, a_k$ bilden ein affines Koordinatensystem von A."

4 (4 Punkte). Zeige, dass die Punkte

$$a_0 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad a_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad a_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ein affines Koordinatensystem von $\mathbb{R}^2$ bilden und bestimme eine affine Abbildung $\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, sodass $\alpha(a_0) = a_1$, $\alpha(a_1) = a_2$ und $\alpha(a_2) = a_0$. Genauer, bestimme $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ und $b \in \mathbb{R}^2$, sodass $\alpha(x) = Ax + b$. Ist diese Abbildungen α ein affiner Isomorphismus?

5 (5 Punkte). Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum.

(a) Was verstehen wir unter dem projektiven Raum $P(V)$?
(b) Was verstehen wir unter einem projektiven Teilraum von $P(V)$?
(c) Was verstehen wir unter der Dimension eines projektiven Teilraums?
(d) Was verstehen wir unter der projektiven Hülle einer Teilmenge $S \subseteq P(V)$?
(e) Formuliere und beweise die Dimensionsformel für zwei projektive Teilräume von $P(V)$!

6 (2 Punkte). Erkläre den Zusammenhang zwischen Projektivitäten $\pi\colon \mathbb{R}\mathrm{P}^1 \to \mathbb{R}\mathrm{P}^1$ und den (nicht überall definierten) Abbildungen

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d},$$

wobei $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und $ad - bc \neq 0$.

7 (3 Punkte). Seien P_0, P_1, P_2, P_3 vier verschiedene Punkte einer projektiven Geraden. Gib eine Definition für das Doppelverhältnis $\mathrm{DV}(P_0, P_1, P_2, P_3)$ und zeige, dass folgende Relation gilt:

$$\mathrm{DV}(P_0, P_1, P_2, P_3) = 1 - \mathrm{DV}(P_2, P_1, P_0, P_3).$$

8 (5 Punkte). Seien V und W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume, $b_1, \ldots, b_n$ eine Basis von V und $c_1, \ldots, c_m$ eine Basis von W. Zeige, dass $b_i \otimes c_j$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$, eine Basis von $V \otimes W$ bildet und berechne $\dim(V \otimes W)$.

9 (3 Punkte). Seien V und W zwei endlich dimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume. Zeige, dass die bilineare Abbildung

$$\phi\colon V^* \times W \to L(V, W), \qquad \phi(\alpha, w)(v) := \alpha(v)w,$$

einen Isomorphismus $V^* \otimes W = L(V, W)$ induziert, $\alpha \in V^*$, $w \in W$, $v \in V$.

10 (5 Punkte). Sei $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ ein Teilkörper und V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Erkläre wie $V \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{L}$ zu einem $\mathbb{L}$-Vektorraum gemacht wird. Die Vektorraumaxiome sind nicht zu verifizieren, gehe aber darauf ein, wie die Multiplikation mit Skalaren in $\mathbb{L}$ erklärt ist und warum dies wohldefiniert ist. Für jede $\mathbb{K}$-lineare Abbildung $\varphi\colon V \to W$ zeige, dass $\varphi \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{L}}\colon V \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{L} \to W \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{L}$ eine $\mathbb{L}$-lineare Abbildung ist.

Punkte:	0–20	$20\frac{1}{2}$–25	$25\frac{1}{2}$–30	$30\frac{1}{2}$–35	$35\frac{1}{2}$–40
Note:	5	4	3	2	1

Punkte: **Beurteilung:**

Lösungen

1. Die gesuchte Polarzerlegung ist $A = UR$, wobei

$$A^t A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad R = \sqrt{A^t A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad U = AR^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Wir diagonalisieren zunächst den quadratischen Teil,

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} 3 & & \\ & -3 & \\ & & 0 \end{pmatrix} U^{-1},$$

wobei

$$U = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad U^{-1} = U^t = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Setzen wir

$$\tilde{x} := \frac{2x + 2y - z}{3}, \qquad \tilde{y} := \frac{2x - y + 2z}{3}, \qquad \tilde{z} := \frac{-x + 2y + 2z}{3},$$

dann gilt also

$$y^2 - z^2 + 4xy - 4xz = 3\tilde{x}^2 - 3\tilde{y}^2.$$

Da

$$x = \frac{2\tilde{x} + 2\tilde{y} - \tilde{z}}{3}, \qquad y = \frac{2\tilde{x} - \tilde{y} + 2\tilde{z}}{3}, \qquad z = \frac{-\tilde{x} + 2\tilde{y} + 2\tilde{z}}{3},$$

gilt

$$-6x + 4y + 2z = -2\tilde{x} - 4\tilde{y} + 6\tilde{z},$$

und wir erhalten:

$$\begin{aligned} y^2 - z^2 + 4xy - 4xz - 6x + 4y + 2z + 8 \\ &= 3\tilde{x}^2 - 3\tilde{y}^2 - 2\tilde{x} - 4\tilde{y} + 6\tilde{z} + 8 = \\ &= 3(\tilde{x} - 1/3)^2 - 3(\tilde{y} + 2/3)^2 + 6(\tilde{z} + 3/2). \end{aligned}$$

Die Bewegung $\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$\alpha\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \tilde{x} - 1/3 \\ \tilde{y} + 2/3 \\ \tilde{z} + 3/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2x + 2y - z \\ 2x - y + 2z \\ -x + 2y + 2z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ 3/2 \end{pmatrix},$$

bildet daher E auf das hyperbolische Paraboloid (den Sattel)

$$\alpha(E) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 : 3\bar{x}^2 - 3\bar{y}^2 + 6\bar{z} = 0 \right\} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 : \bar{x}^2 - \bar{y}^2 + 2\bar{z} = 0 \right\}$$

ab.

3. siehe Definition VIII.1.28 bzw. Proposition VIII.1.27 im Skriptum.

4. Die Punkte a_0, a_1, a_2 bilden ein affines Koordinatensystem, denn $a_1 - a_0 = \binom{1}{0}$ und $a_2 - a_0 = \binom{1}{1}$ bilden eine Basis von $\mathbb{R}^2$. Die gesuchte affine Abbildung ist

$$\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Da α ein affines Koordinatensystem auf ein affines Koordinatensystem abbildet, ist α ein affiner Isomorphismus.

5. siehe Abschnitt VIII.3 im Skriptum.

6. vgl. Seite 289 im Skriptum.

7. Die Definition des Doppelverhältnisses findet sich in Definition VIII.3.29 im Skriptum. Bezeichne G die projektive Gerade, die die Punkte $P_0, \ldots, P_3$ enthält. Sei $\pi\colon \mathbb{K}\mathrm{P}^1 \to G$ die eindeutig bestimmte projektive Abbildung, sodass $\pi(0) = P_0$, $\pi(\infty) = P_1$, $\pi(1) = P_2$. Setzen wir $x := \mathrm{DV}(P_0, P_1, P_2, P_3)$ dann gilt nach Definition des Doppelverhältnisses, $\pi(x) = P_3$. Betrachte die Projektivität $\lambda\colon \mathbb{K}\mathrm{P}^1 \to \mathbb{K}\mathrm{P}^1$, $\lambda(\xi) = 1 - \xi$ und $\tilde{\pi} := \pi \circ \lambda\colon \mathbb{K}\mathrm{P}^1 \to G$. Es gilt dann $\tilde{\pi}(0) = \pi(1) = P_2$, $\tilde{\pi}(\infty) = \pi(\infty) = P_1$, $\tilde{\pi}(1) = \pi(0) = P_0$ und $\tilde{\pi}(1 - x) = \pi(x) = P_3$, woraus wir $\mathrm{DV}(P_2, P_1, P_0, P_3) = 1 - x = 1 - \mathrm{DV}(P_0, P_1, P_2, P_3)$ schließen.

8. siehe Proposition IX.2.5 im Skriptum.

9. siehe Proposition IX.2.10 im Skriptum.

10. siehe Abschnitt IX.3 im Skriptum.