Name	Matrikelnummer	Studienkennzahl

Prüfung zu

Lineare Algebra und Geometrie 2

Wintersemester 2012/13, LVN 250021

am 28. März 2014, 2-stündig

1 (5 Punkte)**.** Zeige, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

positiv ist, und bestimme $\sqrt{A}$.

2 (3 Punkte)**.** Was verstehen wir unter einer Singulärwertzerlegung einer komplexen Matrix, und was sind ihre Singulärwerte?

3 (3 Punkte)**.** Bestimme die Singulärwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

4 (2 Punkte)**.** Was verstehen wir unter der Polarzerlegung einer quadratischen komplexen Matrix?

5 (5 Punkte)**.** Bestimme die Polarzerlegung der Matrix

$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 10 & 11\mathbf{i} \\ 5\mathbf{i} & 2 \end{pmatrix}.$$

6 (5 Punkte)**.** Seien $a > f > 0$, $F_1 = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, und $F_2 = \begin{pmatrix} -f \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Zeige, dass die Menge

$$E = \left\{ P \in \mathbb{R}^2 : \|P - F_1\| + \|P - F_2\| = 2a \right\}$$

eine Quadrik ist. Dabei bezeichnet $\|\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ die Euklidische Norm.

7 (4 Punkte)**.** a) Was verstehen wir unter einem projektiven Raum?

b) Was ist eine projektive Abbildung?

c) Was ist eine projektive Gerade?

d) Was verstehen wir unter dem Doppelverhältnis von vier verschiedenen Punkten in einer projektiven Geraden?

8 (2 Punkte)**.** Erkläre den Zusammenhang zwischen Projektivitäten $\pi\colon \mathbb{R}\mathrm{P}^1 \to \mathbb{R}\mathrm{P}^1$ und den (nicht überall definierten) Abbildungen

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d},$$

wobei $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und $ad - bc \neq 0$.

9 (3 Punkte)**.** Sei $\pi\colon G_1 \to G_2$ eine projektive Abbildung zwischen projektiven Geraden. Zeige

$$\mathrm{DV}(\pi(P_0), \pi(P_1), \pi(P_2), \pi(P_3)) = \mathrm{DV}(P_0, P_1, P_2, P_3),$$

für je vier verschiendene Punkte P_0, P_1, P_2, P_3 in G.

10 (3 Punkte)**.** Was verstehen wir unter dem Tensorprodukt zweier Vektorräume?

11 (5 Punkte)**.** Seien V und W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume, $b_1, \dots, b_n$ eine Basis von V und $c_1, \dots, c_m$ eine Basis von W. Zeige, dass $b_i \otimes c_j$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$, eine Basis von $V \otimes W$ bildet und berechne $\dim(V \otimes W)$.

Punkte:	0–20	$20\frac{1}{2}$–25	$25\frac{1}{2}$–30	$30\frac{1}{2}$–35	$35\frac{1}{2}$–40
Note:	5	4	3	2	1

Punkte: **Beurteilung:**

Lösungen

1. Da A symmetrisch ist, und weil alle Hauptminoren positiv sind, ist A eine positive Matrix. Es gilt $A = UDU^{-1} = UDU^t$ wobei

$$D = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Somit

$$\sqrt{A} = U\sqrt{D}U^{-1} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Siehe Satz VII.5.15 und Korollar VII.5.16 im Skriptum.

3. Die Eigenwerte der Matrix

$$AA^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

sind: 30, 6 und 0. Die Singulärwerte von A sind daher: $\sqrt{30}$ und $\sqrt{6}$.

4. Siehe Satz VII.5.10 und Korollar VII.5.11 im Skriptum.

5. Die Polarzerlegung hat die Form $A = UR$, wobei

$$R = \sqrt{A^*A} = \begin{pmatrix} 5 & 4\mathbf{i} \\ -4\mathbf{i} & 5 \end{pmatrix}^{1/2} = \begin{pmatrix} 2 & \mathbf{i} \\ -\mathbf{i} & 2 \end{pmatrix} > 0$$

und

$$U = AR^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 10 & 11\mathbf{i} \\ 5\mathbf{i} & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -\mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4\mathbf{i} \\ 4\mathbf{i} & 3 \end{pmatrix} \in U_2.$$

6. Nach Definition von E liegt ein Punkt $P = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ genau dann in E, wenn

$$\sqrt{(x+f)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-f)^2 + y^2}.$$

Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$(x+f)^2 + y^2 = 4a^2 + (x-f)^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x-f)^2 + y^2}$$

oder äquivalent:

$$\sqrt{(x-f)^2 + y^2} = a - fx/a$$

Nochmaliges Quadrieren zeigt, dass dies zu

$$x^2 - 2fx + f^2 + y^2 = a^2 + f^2x^2/a^2 - 2fx$$

äquivalent ist. Somit kann E durch eine quadratische Gleichung beschrieben werden, ist daher eine Quadrik. Weiteres Umformen liefert die äquivalente Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

wobei $b = \sqrt{a^2 - f^2}$. Es handelt sich daher um eine Ellipse in erster Hauptlage mit Halbachsen a und b.

7. siehe Abschnitt VIII.3 im Skriptum

8. siehe Seite 289 im Skriptum.

9. siehe Proposition VIII.3.33 im Skriptum.

10. siehe Proposition IX.2.3 im Skriptum.

11. siehe Proposition IX.2.5 im Skriptum.