**Familienname:**
**Vorname:**
**Matrikelnummer:**
**Studienkennzahl:**

| **1** |
|---|
| **2** |
| **3** |
| **4** |
| **G** |

- ☐ **R. Steinbauer**
- ☐ **H. Schichl**

**Note:**

# Einführung in das mathematische Arbeiten

## (4.5.2007)

1. *(Kurvendiskussion)*
   Eine Polynomfunktion $p$ vierten Grades ist symmetrisch um die $y$–Achse (d.h. $p(-x) = p(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$) und besitzt bei $W = (1, 3)$ einen Wendepunkt. Die Steigung der Tangente in $W$ ist $k_W = 2$.

   (a) Bestimme die Funktionsgleichung von $p$. (4 Punkte)

   (b) Ermittle alle Hoch-, Tief- und Wendepunkte von $p$. (2 Punkte)

   (c) Berechne alle Nullstellen. (2 Punkte)

   (d) Ermittle den Inhalt des endlichen Flächenstücks, das von $p$ und der $x - Achse$ eingeschlossen wird. (2 Punkte)

2. *(Analytische Geometrie)*

   (a) Untersuche (rechnerisch) die Lagebeziehung der drei angegebenen Ebenen. Berechne gegebenenfalls Schnittpunkt oder Schnittgeraden.

   $$\begin{aligned} \varepsilon_1: \quad 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 11 \\ \varepsilon_2: \quad 2x_1 - 1x_2 - 3x_3 &= -9 \\ \varepsilon_3: \quad -x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 11. \end{aligned}$$

   (6 Punkte)

   (b) Beweise die folgende Aussage: Ist $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ein Vektor im $\mathbb{R}^2$, dann sind die Vektoren $y = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$ und $z = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}$ Normalvektoren für $x$ mit gleichem Betrag. (4 Punkte)

3. (a) *($\sqrt{2}$)* Zeige dass $\sqrt{2}$ irrational ist. (5 Punkte)

(b) *(Algebra)* Überprüfe, ob die Menge mit der unten definierten Relation $(G = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\}, \oplus)$ eine Gruppe bildet:

$$(a_1, a_2) \oplus (b_1, b_2) := (a_1 b_2 + b_1 a_2, a_2 b_2).$$

(5 Punkte)

4. *(Sammelsurium)*

(a) Zeige, dass auf $\mathbb{Z}_3$ die Operation $\sqrt{\bar{a}} := \overline{\sqrt{a}}$ nicht wohldefiniert ist. (2 Punkte)

(b) Sind Körper nullteilerfrei? Warum (nicht)? (2 Punkte)

(c) Gibt es eine Gruppe mit einem Element? Gibt es einen Körper mit einem Element? (Beispiele oder Gegenargumente; 2 Punkte)

(d) Bestimme die Potenzmenge von $\{\nabla, *, \circ, \delta, \partial\}$ und gib eine Partition dieser Menge an. (2 Punkte)

(e) Beweise die Dreiecksungleichung für den Abstand auf $\mathbb{R}$, d.h. zeige, dass für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$$

gilt. (2 Punkte)