Familienname:
Vorname:
Matrikelnummer:
Studienkennzahl:

1
2
3
4
G

☐ **R. Steinbauer**
☐ **H. Schichl**

Note:

Prüfung zu Einführung in das mathematische Arbeiten (15.6.2007)

(1) *(Algebra)*
   (a) Definiere den Begriff *abelsche Gruppe.* (**3 Punkte**)
   (b) Definiere den Begriff *Nullteiler* und gib ein Beispiel für Nullteiler an. (**2 Punkte**)
   (c) Überprüfe, ob die unten definierte algebraische Struktur $(T, \oplus, \otimes)$ ein Unterring von $\mathbb{R}$ ist:
$$T := \{a + \sqrt{6}b \mid a, b \in \mathbb{Z}\},$$
   mit
$$(a_1 + \sqrt{6}b_1) \oplus (a_2 + \sqrt{6}b_2) := a_1 + a_2 + \sqrt{6}(b_1 + b_2),$$
$$(a_1 + \sqrt{6}b_1) \otimes (a_2 + \sqrt{6}b_2) := a_1a_2 + 6b_1b_2 + \sqrt{6}(a_1b_2 + a_2b_1).$$
   (**5 Punkte**)

(2) (a) *(Analytische Geometrie)* Bestimme die zur Ebene $\varepsilon : 2x - 3y + 5z = 3$ im Abstand 5 parallel liegenden Ebenen. (**7 Punkte**)
   (b) *(Komplexe Zahlen)* Löse die quadratische Gleichung $z^2 - 4z + 1 - 4i = 0$ und stelle die Lösungen in der Form $a + ib$ dar. (**3 Punkte**)

(3) (a) *(Kurvendiskussion)* Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = ae^{bx} - \sin^2 cx$ hat bei $P = (0|y_P)$ die Wendetangente $t_P : 4x + 3y = 6$. Bestimme die Funktionsgleichung von f. Wieviele verschiedene Funktionen f gibt es, die das Problem lösen? (**5 Punkte**)
   (b) *(Abbildungen)*
      (i) Definiere die Begriffe Relation und Abbildung und erkläre den Unterschied. (**2 Punkte**)
      (ii) Seien $f : B \to C$ und $g : A \to B$ Abbildungen. Zeige: Sind f und g surjektiv, dann auch $f \circ g$. (**3 Punkte**)

(4) (a) *(Induktion)* Beweise mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ gilt:
$$\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}.$$
   (**6 Punkte**)
   (b) *(Logik)* Verneine die Aussage (ohne explizit $\neg$ zu verwenden!)
$$\forall x \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall y \in \mathbb{R} : |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$
   (**2 Punkte**)
   (c) Berechne die folgenden Restklassen:
$$17 + 29 \mod 12, \quad 2^{4112} \mod 3.$$
   (**2 Punkte**)