Aufgabensammlung
zur Vorlesung
Einführung in das mathematische Arbeiten

Zusammengestellt von
T. Eisenkölbl, M. Fulmek, W. Huyer,
M. Kunzinger, H. Massold, P. Raith,
H. Schichl und R. Steinbauer

Sommersemester 2007

Dieses Skriptum enthält Übungsaufgaben zur Vorlesung *Einführung in das mathematische Arbeiten.* Diese findet geblockt am Anfang des Semesters („Studieneingangsphase", 5.3.—22.3.2007) statt und wird in diesem Zeitraum von den Proseminaren zu den AnfängerInnenvorlesungen *Proseminar zu Analysis 1* und *Proseminar zu Lineare Algebra und Geometrie 1* begleitet. Dementsprechend zerfällt dieses Skriptum in die beiden Teile „Analysis" und „Lineare Algebra und Geometrie". Die entsprechenden Aufgaben bilden den Stoff des jeweiligen Proseminars während der ersten 2–3 Wochen (d.h. in den Kalenderwochen 12,13 und 16, da die Proseminare ab dem 19.3. beginnen).

Die hier zusammengestellten Beispiele dienen der eigenständigen Erarbeitung und Vertiefung des Stoffes aus der Vorlesung. Sie entfalten ihre volle positive Wirkung nur dann, wenn sie *selbständig* bearbeitet bzw. gelöst werden! In den Proseminaren werden die Aufgaben dann von Studierenden vorgetragen und diskutiert.

Weitere Informationen für StudienbeginnerInnen im Sommersemester 2007 finden Sie im Internet unter `http://www.mat.univie.ac.at/~sosem07`.

R. Steinbauer, März 2007

Inhaltsverzeichnis

Analysis

Summen- und Produktzeichen, Induktion

1. *Summenschreibweise* Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke mit Hilfe von Summen- bzw. Produktzeichen:

   (a) $3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729$

   (b) $a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10}$

   (c) $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot \dots \cdot (2m)$

   (d) $e^2 + 2e^6 + 4e^{10} + 8e^{14} + 16e^{18} + 32e^{22} + 64e^{26}$

   (e) $\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{4}{5} + \frac{5}{6}$

   (f) $a_1 + 3a_2 + 5a_3 + 2a_1^2 + 6a_2^2 + 10a_3^2 + 4a_1^3 + 12a_2^3 + 20a_3^3 + 8a_1^4 + 24a_2^4 + 40a_3^4$

2. *Summen- und Produktschreibweise 1.* Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke ohne Verwendung der Summen- bzw. Produktzeichen an:

   (a) $\sum_{k=3}^{7} 2^{k-1}$

   (b) $\sum_{k=2}^{n} e^{k-1}$

   (c) $\sum_{k=-2}^{2} b_{-k}$

   (d) $\prod_{j=2}^{5} k^j$

   (e) $\prod_{j=2}^{5} j^i$

   (f) $\prod_{j=2}^{5} k^2$

   (g) $\sum_{j=2}^{4} \prod_{k=1}^{3} (jk - 2)$

   (h) $\sum_{k=0}^{m} \sum_{j=0}^{m} \binom{k}{j}$

3. *Summen- und Produktschreibweise 2.* Überprüfen Sie, welche der folgenden Gleichungen gelten. Sollten Sie in einer Gleichung einen Fehler finden, so stellen Sie die rechte Seite richtig.

   (a) $$\sum_{i=0}^{5} b_i = \sum_{j=-2}^{7} b_{j+2}$$

   (b) $$\sum_{i=1}^{5} d_{i+3} = \sum_{j=2}^{7} d_{j+2}$$

   (c) $$\sum_{t \in \{9,16,25,36,49\}} m_t^j = \sum_{p=2}^{6} m_{(p+1)^2}^i$$

   (d) $$\sum_{k=0}^{n} x^{2k+1} = -\frac{1}{2} \sum_{j=0}^{2n+1} \Big((-1)^j - 1 \Big) x^j$$

   (e) $$\sum_{k=1}^{n} c_{2k-1} = \sum_{i=0}^{n-1} c_{2k+1}$$

(f) $\sum_{j=0}^{n} k^{2j} = \sum_{r=0}^{2n} k^r - \sum_{s=0}^{n} k^{2s+1}$

(g) $(\log 3) \sum_{j=0}^{n} a_j = \log \prod_{i=0}^{n} 3^{a_i}$

(h) $\sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} a^j b^{k-j} = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=j}^{n} a^j b^{k-j}$

(i) $\prod_{j=0}^{n} j(n-j) p^{\frac{1}{2} j(n-j)} = \sqrt{\prod_{k=1}^{m-1} k(m-k) p^{k(m-k)}}$

Hinweis: Die Lösung hängt hier von den Werten von n und m ab; verwenden Sie eine Fallunterscheidung. In den Fällen $n < 0, m \geq 2$ und $n \geq 0, m \geq 2$ hängt die Lösung zusätzlich vom Wert von p ab. Eine vollständige Lösung dieses Beispiels ist schwierig—aber lassen Sie sich nicht entmutigen und versuchen Sie es!

Summen- und Produktzeichen, Induktion

4. *Vollständige Induktion.* Beweisen Sie die folgenden Identitäten für alle angegebenen $n \in \mathbb{N}$:

(a) $\sum_{k=0}^{n} (3k-2) = \frac{(1+n)(3n-4)}{2}, \; n \geq 0$

(b) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \; n \geq 1$

(c) $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^{n-1}})(1+x^{2^n}) = \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}, \; n \geq 0, x \neq 1$

(d) $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}, \; q \neq 1, n \geq 1$

5. *P*izzaschnitten. Beweisen Sie, dass sich eine Pizza durch n geradlinige Schnitte, die von Rand zu Rand verlaufen, in höchstens $\frac{1}{2}(n^2+n+2)$ Stücke teilen lässt.

6. *Bernoullische Ungleichung.* Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \quad \text{für } x \geq -1 \text{ und } n \geq 1.$$

Mengen, Relationen

7. *Mengenoperationen konkret.* Gegeben $X = \{1, 2, 3, 4\}, Y = \{2, 4, 6, 8\}, Z = \{1, 3, 5, 7\}$. Bestimmen Sie:
   (a) $(X \backslash Y) \cup Z$
   (b) $(X \cup Z) \backslash Y$
   (c) $(X \cup Y) \backslash (Y \cup Z)$
   (d) $X \cup (Y \backslash Z)$
   (e) $(Y \cup X) \backslash (X \cap Z)$

8. *Rechengesetze für Mengenoperationen.* Beweisen Sie
   (a) eines der Distributivgesetze und
   (b) eines der De Morgan-Gesetzte

   aus Theorem 4.1.11. Verwenden Sie für einen der beiden Beweise die Mengentafel, für den anderen die Definitionen der Mengenoperationen und Theorem 3.1.6 (wie im Beweis des Distributivgesetzes im Skriptum).

9. *Mengenoperationen abstrakt.* Seien A und B Mengen. Zeigen Sie:
   (a) $B \subseteq A \;\Rightarrow B \cup A = A$ und $B \cap A = B$
   (b) $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subseteq B$
   (c) $(A \cap B) \cup A = A$
   (d) $(B \cup A) \setminus (B \cap A) = (B \setminus A) \cup (A \setminus B)$

10. *Grundeigenschaften von Relationen.* Welche der Eigenschaften „reflexiv“, „symmetrisch“ und „transitiv“ haben die folgenden Relationen R auf $\mathbb{N}$?
    (a) $a\ R\ b \;:\Leftrightarrow\; a$ ist Primteiler von b
    (b) $a\ R\ b \;:\Leftrightarrow\; |a| = |b|$
    (c) $a\ R\ b \;:\Leftrightarrow\; (a$ teilt $b)$ oder $(b$ teilt $a)$
    (d) $a\ R\ b \;:\Leftrightarrow\; a = 5^m \cdot b$ für ein $m \in \mathbb{Z}$

11. *Äquivalenzrelation oder nicht?* Sei X die Menge aller Menschen, $x, y \in X$. Welche der folgenden Relationen sind Äquivalenzrelationen?
    (a) x steht zu y in Relation, falls x die gleiche Muttersprache hat wie y.
    (b) x steht zu y in Relation, falls x älter oder genauso alt wie y ist.
    (c) x steht zu y in Relation, falls x und y sich gegenseitig kennen.

12. *Äquivalenzrelationen.*

    (a) Auf der Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen betrachten wir die Relation

    $$x \equiv y \;:\Leftrightarrow x - y \text{ gerade.}$$

    Zeigen Sie, dass es sich dabei um eine Äquivalenzrelation handelt.

    (b) Ersetzen Sie in (a) „gerade" durch „ungerade". Handelt es sich nach wie vor um eine Äquivalenzrelation?

    (c) Finden Sie weitere Beispiele für Äquivalenzrelationen.

    (d) Bei einer Versuchsreihe werden 2 Messergebnisse als gleich betrachtet, wenn sie sich um weniger als $10^{-22}m$ unterscheiden. Definiert dieser Gleichheitsbegriff eine Äquivalenzrelation?

13. *Rechnen mit Restklassen*

    (a) Stellen Sie fest, ob die angegebenen Zahlen in der selben Restklasse modulo m liegen:

    (i) $2,\ 12,\ m = 2$
    (ii) $8,\ 302,\ m = 3$
    (iii) $2,\ 12,\ m = 6$
    (iv) $-111,\ -29,\ m = 7$
    (v) $-1,\ -18,\ m = 5$
    (vi) $-59,\ -91,\ m = 8$

    (b) Berechnen Sie (a) die kleinste natürlich Zahl x und (b) die größte negative ganze Zahl x für die gilt:

    (i) $x \equiv 25 \mod 7$
    (ii) $x \equiv (25 + 39) \mod 7$
    (iii) $x \equiv (25 \cdot 30) \mod 5$
    (iv) $x \equiv 25^2 \mod 7$

    (c) Berechnen Sie modulo 3 und modulo 4:

    (i) $\bar{2} + \bar{3}$
    (ii) $\bar{1} - \bar{2}$
    (iii) $\bar{2} - \bar{3}$
    (iv) $\bar{2} \cdot \bar{2}$
    (v) $\bar{2} \cdot \bar{3}$
    (vi) $\bar{2} \cdot \bar{4}$

Ordnungseigenschaften, Betrag

14. *Ordnung und Schranken konkret.* Wir betrachten $\mathbb{R}$ mit der natürlichen Ordnung $\leq$. Sind die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ nach oben bzw. nach unten beschränkt? Wenn ja, gib Infimum bzw. Supremum an. Handelt es sich dabei jeweils um Minima resp. Maxima?

    (a) $[-4, 18]$
    (b) $(-3, -2)$
    (c) $[-3, 2)$
    (d) $(-3, -2) \cup [4, \infty)$
    (e) $(-\infty, 4] \cap (1, \infty)$
    (f) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(-n, n)$
    (g) $\emptyset$
    (h) $\mathbb{N}_g$, die geraden natürlichen Zahlen

15. *Ordnungsaxiome.* Sei $(K, +, \cdot, \leq)$ ein geordneter Körper. Beweisen Sie folgende Aussagen für $a, b, c, d \in K$, *ausschließlich* unter Verwendung der Definition eines geordneten Körpers und der Proposition 6.3.2. Begründen Sie jeden ihrer Schritte!

    (a) Gleichsinnige Ungleichungen „dürfen" addiert werden, genauer: aus $a \leq b$ und $c \leq d$ folgt $a + c \leq b + d$, oder in leicht verständlicher Symbolik
    $$\begin{array}{ccc} a & \leq & b \\ c & \leq & d \\ \hline a+c & \leq & b+d \end{array}$$
    .

    (b) Gleichsinnige Ungleichungen „dürfen" immer dann miteinander multipliziert werden, wenn alle Glieder nicht negativ sind, genauer: aus $0 \leq a \leq b$ und $0 \leq c \leq d$ folgt $ac \leq bd$, oder in leicht verständlicher Symbolik
    $$\begin{array}{ccccc} 0 & \leq & a & \leq & b \\ 0 & \leq & c & \leq & d \\ \hline & & ac & \leq & bd \end{array}$$

    Bemerkung: Aus (a) folgt (setze $c = 0$) dass eine Kleinergleichbeziehung wahr bleibt, falls auf der rechten Seite eine positive (sogar nichtnegative) Zahl addiert wird; man sagt: die Abschätzung $a \leq b$ wird vergröbert, wenn eine psoitive Zahl zu b addiert wird.

16. *Arithmetisches Mittel.* Zeigen Sie: In einem geordneten Körper folgt aus $a \leq b$
    $$a \leq \frac{a+b}{2} \leq b.$$

17. *Unendlich kleine Zahlen?* Für $a \in \mathbb{R}$ gilt: Ist $0 \leq a \leq \varepsilon$ für jedes $\varepsilon > 0$, so folgt $a = 0$.

18. *Ungleichungen für den Betrag.* Zeigen Sie für $a, b \in \mathbb{R}$

    (a) $|a + b| \leq |a| + |b|$

    (b) $|a - b| \leq |a| + |b|$

    (c) $|a| - |b| \leq |a - b|$

19. *Eigenschaften des Betrags 1.* Zeigen Sie für $a, b \in \mathbb{R}$

    (a) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \qquad (b \neq 0)$,

    (b) $\Big||a| - |b|\Big| \leq \begin{cases} |a - b| \\ |a + b| \end{cases}$.

20. *Eigenschaften des Betrags 2.* Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

    (a) $a^2 = |a^2| = |a|^2 \; \forall a \in \mathbb{R}$,

    (b) Seien $x, x_0 \in \mathbb{R}$ und $\mathbb{R} \ni \varepsilon > 0$. Dann gilt

    $$|x| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x < \varepsilon \qquad \text{und} \qquad |x - x_0| < \varepsilon \Leftrightarrow x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon.$$

21. *Cauchyungleichung.* Zeigen Sie für $a, b \in \mathbb{R}$ die Ungleichung

    $$|ab| \leq \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

    Hinweis: Verwenden Sie die bekannten Formeln für $(a \pm b)^2$ und Proposition 6.3.2(5), also die Tatsache, dass Quadrate nichtnegativ sind.

22. *Minimum, Maximum und Betrag.* Zeigen Sie dass für $a, b \in \mathbb{R}$

    (a) $\max(a, b) = \frac{a + b + |a - b|}{2}$,

    (b) $\min(a, b) = \frac{a + b - |a - b|}{2}$ und

    (c) $\max(a, b) - \min(a, b) = |a - b|$

    gilt. *Hinweis:* Für die Definition von max und min siehe Lineare Algebra, Aufgabe 1.

Lineare Algebra und Geometrie

Mathematische Grundlagen, Logik

1. *Fallunterscheidungen.*

   (a) Zeigen Sie $\max(x, y) + \min(x, y) = x + y$.

   (b) Berechnen Sie $\max(x, y) - \min(x, y)$.

   Hinweis: Das Maximum resp. Minimum zweier Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$\max(x,y) := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq y \\ y & \text{falls } x \leq y \end{cases} \qquad \text{bzw.} \qquad \min(x,y) := \begin{cases} y & \text{falls } x \geq y \\ x & \text{falls } x \leq y. \end{cases}$$

2. *Binomialkoeffizient.* Wiederholen Sie den Begriff des Binomialkoeffizienten und beweisen Sie die folgenden Identitäten.

   (a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n,$

   (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$

   Hinweis: Diese Aufgaben bewältigen Sie am einfachsten mit einem „Trick“: Formulieren Sie die rechten Seiten mit Hilfe des Binomischen Lehrsatzes!

3. *Mathematische Ausdrucksweise 1.* Lesen Sie die folgende verunglückte Lösung zur angeführten Übungsaufgabe durch. Versuchen Sie, alle Unklarheiten und Ungeschicklichkeiten zu entdecken und produzieren Sie eine den mathematischen Gepflogenheiten und Schreibweisen entsprechende richtige Lösung:
   Zeigen Sie: Das Quadrat jeder ungeraden Zahl ist kongruent 1 modulo 4.
   LÖSUNG:

$$\begin{array}{rcl} n \quad \text{Quadrat} & \Longrightarrow & n^2 \\ (2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 & = & \text{Rest } 1 \\ & \nearrow & \\ \text{modulo } 4 & & \end{array}$$

4. *Mathematische Ausdrucksweise 2.* Wie in der vorigen Aufgabe:
   Zeigen Sie: Eine natürliche Zahl ist genau dann durch 2 teilbar, wenn ihre letzte Stelle gerade ist.
   LÖSUNG:
   $$\begin{aligned} &\Longrightarrow a_n 10^n + \cdots + a_1 10^1 + a_0 \quad \text{gerade} \\ &\Longrightarrow a_0 \text{ gerade, da } 2|10 \\ &\Longleftarrow 2|10 \quad a_0 = 2a_0' \\ &\Longrightarrow n = a_k 10^k + \cdots + a_1 10^1 + a_0 \quad \text{gerade} \end{aligned}$$

5. *Indirekter Beweis 1.* Beweisen Sie: n^2 ungerade $\Rightarrow n$ ungerade.

6. *Indirekter Beweis 2.* Es gibt keine ganzen Zahlen n, m mit $28m + 42n = 100$.

7. *Disjunktive Normalform der Implikation.* Bestimmen Sie die disjunktive Normalform der Implikation $a \Rightarrow b$ und vereinfachen Sie diese bis zur konjunktiven Normalform $\neg a \vee b$. Begründen Sie jeden Ihrer Umformungsschritte (mit einer der Rechenregeln aus Theorem 3.1.6.)

8. *Disjunktive und konjunktive Normalform.* Gegeben ist die unten stehende Schaltwerttabelle. Bestimmen Sie disjunktive und konjunktive Normalform dieser Schaltung und versuchen Sie diese jeweils soweit als möglich zu vereinfachen.

a	b	c	$f(a,b,c)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

9. *Äquivalente Aussagen.* Beweisen Sie die Äquivalenz
   $$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$$
   und formulieren Sie gemäß dieser Regel äquivalente Aussagen zu:
   (a) $\forall n \in \mathbb{N}$: $n^2 > n \Rightarrow n > 1$
   (b) $\forall n \in \mathbb{N}$: $3 \mid n \Rightarrow 4 \mid n$
   (c) $\forall n \in \mathbb{N}$: n^3 ungerade $\Rightarrow n$ ungerade

   Hinweis: Das Zeichen „|“ bedeutet „teilt“.

10. *Rechenregeln für logische Operationen.* Beweisen Sie

    (a) eines der Verschmelzungsgesetze und

    (b) eines der De Morganschen Gesetze

    aus Theorem 3.1.6.

11. *Logik 1.* Wir betrachten die Aussagen p und q über deren Wahrheitswert wir nichts wissen. Es gelte jedoch $p \Rightarrow q$. Was läßt sich dann über die folgenden vier Aussagen sagen?

    (a) $\neg q \Rightarrow \neg p$

    (b) $\neg p \Rightarrow \neg q$

    (c) $q \Rightarrow \neg p$

    (d) $\neg p \Rightarrow q$

12. *Logik 2.* Es seien p, q, und r beliebige Aussagen. Sind dann die folgenden Aussagen wahr?

    (a) $\Big((\neg p \wedge q) \wedge (p \Rightarrow r)\Big) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$

    (b) $\neg(r \vee \neg r)$

    (c) $(p \Rightarrow q) \vee p$

    (d) $\Big((q \Rightarrow p) \wedge (\neg p)\Big) \Rightarrow \neg q$

13. *Verneinung.* Bilden Sie die Verneinung der folgenden Aussagen:

    (a) Alle Schwammerl sind entweder giftig oder schwer zu finden.

    (b) Alle Schwammerl sind giftig oder schwer zu finden.

    Hinweis: Wir folgen hier der Konvention aus der Vorlesung, die Formulierung „entweder ... oder“ als *ausschließendes Oder* (genau eine der (beiden) Alternativen trifft zu) zu interpretieren. Die Formulierung „oder“ ist natürlich als das (mathematische) *einschließende Oder* (mindestens eine der (beiden) Alternative trifft zu) zu lesen. Falls Ihnen dieser Hinweis Kopfzerbrechen bereitet, dann wiederholen Sie schleunigst den entsprechenden Abschnitt aus der Vorlesung.

    c) Es gibt Vierecke, die genau drei rechte Winkel haben.

    d) Wenn zwei Geraden einen gemeinsamen Punkt besitzen, dann sind sie nicht parallel.

14. *Quantoren.* Begründen Sie, warum die folgenden Aussagen wahr bzw. falsch sind:

    (a) $\forall x \in \mathbb{Z} : \exists y \in \mathbb{Z} : x + y = 0$

(b) $\forall x \in \mathbb{N} : \exists! y \in \mathbb{Z} : x + y = 1$

(c) $\exists x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R} : x = y$

(d) $\forall x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} : x = y$

(e) $\forall x \in \mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} | x > 0\} : \exists y \in \mathbb{R}^+ : x < y$

(f) $\exists x \in \mathbb{R}_0^+ := \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\} : \forall y \in \mathbb{R}_0^+ : x \leq y$

Abbildungen

15. *Bild und Urbild.* Wiederholen Sie die Definition des Bildes und des Urbildes einer Menge unter einer Abbildung. Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und die Mengen A_i, B_i $(i = 1, 2, 3)$ die Bildmengen $f_i(A_i)$ sowie die Urbildmengen $f_i^{-1}(B_i)$:

    (a) $f_1(x) = -x + 1$, $A_1 = \{0, 1, 2\}$, $B_1 = (0, 1)$,

    (b) $f_2(x) = x^2 - 1$, $A_2 = \{-1, 1\}$, $B_2 = \{-1, 0\}$,

    (c) $f_3(x) = a$ ($a \in \mathbb{R}$ konstant), $A_3 = \{-1, 0\} \cup (1, 4)$, $B_3 = \{a\}$.

16. *Injektiv, Surjektiv, Bijektiv 1.*

    (a) Sei $f : A \to B$ eine Abbildung von der Menge A in die Menge B. Geben sie die (genauen(!)) Definitionen für Injektivität, Surjektivität und Bijektivität von f an.

    (b) Sind die folgenden Funktionen, injektiv, surjektiv, bijektiv? Begründen Sie Ihre Antworten.

$$\begin{aligned} &f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto n^4 \\ &f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto n^4 \\ &f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{Q},\ x \mapsto -x + 1 \\ &f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_4(x) = 4x + 1 \\ &f_5 : \mathbb{R} \to [-1, 1],\ x \mapsto \cos x \end{aligned}$$

17. *Injektiv, Surjektiv, Bijektiv 2.*

    (a) Geben Sie jeweils eine injektive und nicht surjektive, eine surjektive und nicht injektive, eine bijektive und eine weder injektive noch surjektive Funktion von A nach B an, wobei A und B geeignete Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind. Lassen Sie dabei Ihrer Phantasie freien Lauf und greifen Sie weder auf die Funktionen der vorigen Aufgabe noch auf die Beispiele aus dem Skriptum zurück.

    (b) Gibt es zwei Funktionen f, g, die beide nicht bijektiv sind, sodass die Zusammensetzung $f \circ g$ bijektiv ist?

    (c) Gibt es zwei Funktionen f, g, die beide nicht injektiv sind, sodass die Zusammensetzung $f \circ g$ injektiv ist?

18. *Urbildmenge.* Sei $f : X \to Y$ eine Funktion, und seien $A, B \subseteq Y$ Teilmengen. Beweisen Sie die folgenden Aussagen und geben Sie jeweils eine verbale Formulierung der Form: „Das Urbild des Durchschnitts zweier Mengen ist … “ an.

    (a) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$,

    (b) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

    Falls Sie sich durch diese beiden Aufgaben nicht genügend herausgefordert fühlen, dann beweisen Sie die folgende Verallgemeinerung für beliebige Duchschnitte bzw. Vereinigungen

    $$\begin{aligned} f^{-1}\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) &= \bigcap_{i\in I} f^{-1}(A_i) \\ f^{-1}\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) &= \bigcup_{i\in I} f^{-1}(A_i). \end{aligned}$$

    Hier ist I eine beliebige Indexmenge und die A_i $(i \in I)$ sind beliebige Mengen.

    (c) $f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$.

    Hinweis: Lassen Sie sich vom relativ hohen Abstraktionsgrad der Aufgabe nicht entmutigen! Gehen Sie formal vor und beginnen Sie zB. den Beweis von (a) mit der definitionsgemäßen Formulierung, dass x ein Element der linken Menge in der Gleichung ist, also $x \in f^{-1}(A\cap B) \Leftrightarrow f(x) \in A\cap B$. Nun verwenden Sie die Definition für den Durchschnitt zweier Mengen … na sehen Sie, nach einer weiteren Verwendung der Definition des Urbilds und des Durchschnitts haben wir gezeigt, dass x Element der rechten Seite der Gleichung ist, also die Gleichheit gilt!

19. *Bildmenge.* Sei $f : X \to Y$ eine Funktion, und seien $A, B \subseteq X$ Teilmengen. Untersuchen Sie, welche Eigenschaften (injektiv, surjektiv, bijektiv) für f nötig sind, damit die nachstehenden Gleichungen erfüllt sind. Muss bzw. kann man das $=$ durch $\subseteq$ oder $\supseteq$ ersetzen, damit die Beziehung auch für allgemeine f gilt? Geben Sie schließlich—wie im obigen Beispiel—eine verbale Formulierungen für jede der Eigenschaften an.

    (a) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$,

    (b) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

    Analog zum vorigen Beispiel gilt hier die Verallgemeinerung auf beliebige Durchschnitte bzw. Vereinigungen. Na, motiviert für einen Versuch?

    (c) $f(X \setminus A) = Y \setminus f(A)$.

Gruppen, Ringe, Körper

20. *Gruppenaxiome.*

    (a) Überprüfen Sie, ob die folgenden beiden auf $\mathbb{R}$ definierten Verknüpfungen $\otimes$ und $\odot$ assoziativ resp. kommutativ sind

    $$a \otimes b := ab - 4$$

    $$a \odot b := 6a + 6b + 3ab + 10 = 3(a+2)(b+2) - 2.$$

    (b) Stellen Sie (durch Nachprüfen der Gruppenaxiome) fest, ob $(\mathbb{R}, \oplus)$ eine abelsche Gruppe ist, wobei die Verknüpfung durch

    $$a \oplus b := a + b - 8$$

    definiert ist

21. S^1. Zeigen Sie, dass die komplexen Zahlen c mit $|c| = 1$ bezüglich der Multiplikation komplexer Zahlen eine Gruppe bilden; diese wird mit S^1 bezeichnet. Kann 1 durch ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ ersetzt werden?

22. *Einheitswurzeln.* Zeigen Sie, dass die drei komplexen Lösungen der Gleichung $x^3 = 1$ eine abelsche Gruppe bezüglich der Multiplikation komplexer Zahlen bilden. Vergleichen Sie ihre Multiplikationstabelle mit derjenigen der additiven Gruppe $\mathbb{Z}_3$.

23. $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ Gegeben sei die Menge

    $$\mathbb{Q}[\sqrt{3}] := \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

    mit den Operationen

    $$\begin{aligned}(a + b\sqrt{3}) \oplus (a' + b'\sqrt{3}) &:= (a + a') + (b + b')\sqrt{3} \\ (a + b\sqrt{3}) \otimes (a' + b'\sqrt{3}) &:= (aa' + 3bb') + (ab' + a'b)\sqrt{3}.\end{aligned}$$

    Bildet $(\mathbb{Q}[\sqrt{3}], \oplus, \otimes)$ einen Körper?

    Hinweis: Eine Möglichkeit diese Aufgabe zu erledigen besteht im Nachprüfen aller 9 Körperaxiome a la Beispiel 5.4.11. Wenn Ihnen dies zu langweilig weil langwierig erscheint können Sie

    (a) einen "educated guess" abgeben und einige der schwierigeren (welche sind das?) Axiome nachrechnen oder

    (b) einen gänzlich anderen Weg einschlagen. Zu diesem Zweck schlagen Sie Proposition 5.4.10 nach und...

24. $\mathbb{Z}_3$. Stellen Sie die beiden Verknüpfungstafeln (bzgl. $+$ und $\cdot$) von $\mathbb{Z}_3$ auf. Welche algebraische Struktur sehen Sie vor sich?

25. $\mathbb{Z}_4$. Stellen Sie die beiden Verknüpfungstafeln (bzgl. $+$ und $\cdot$) für $\mathbb{Z}_4$ auf und vergleichen Sie diese mit derjenigen von $\mathbb{Z}_3$. Welche algebraische Struktur liegt vor? Sind $\mathbb{Z}_3$ und $\mathbb{Z}_4$ als Ringe isomorph?