Familienname:
Vorname:
Matrikelnummer:
Studienkennzahl(en):

1
2
3
4
G

Note:

Einführung in das mathematische Arbeiten

Roland Steinbauer, Wintersemester 2003/04

1. Prüfungstermin (31.10.2003)

1. *(Kurvendiskussion)* Ein Polynom p vom Grad 3 hat in $O = (0, 0)$ einen Extrempunkt und in $W = (1, \frac{2}{3})$ einen Wendepunkt.

   (a) Ermittle die Funktionsgleichung von p. (4 Punkte)

   (b) Bestimme *alle* Null-, Extrem- und Wendepunkte von p und skizziere den Funktionsgraphen. (4 Punkte)

   (c) Bestimme die Fläche, die vom Funktionsgraphen und der x-Achse zwischen den beiden dem Wendepunkt W am nächsten gelegenen Nullstellen von p eingeschlossen wird. (2 Punkte)

2. *(Analytische Geometrie)*

   (a) Untersuche (rechnerisch), welche Lage die beiden Geraden g und h zueinander haben.

$$g: \qquad x = \begin{pmatrix} -9 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$
$$h: \qquad x = \begin{pmatrix} -11 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

   Finde einen Vektor v, der auf die Richtungsvektoren beider Geraden normal steht und die Länge 1 hat. (5 Punkte)

   (b) Überprüfe, ob das gegebene Dreieck ABC rechtwinkelig ist.

$$A = (25, 13, 4), \; B = (11, 5, 10), \; C = (20, 0, -25)$$

   (5 Punkte)

3. *(Logik, Induktion)*

   (a) Was versteht man unter der disjunktiven Normalform einer Schaltung? Wie wird diese konstruiert (d.h. gib den Algorithmus an)? Gib die disjunktive Normalform der Implikation an. (5 Punkte)

   (b) Beweise die folgende Formel mittels vollständiger Induktion für alle natürlichen $n \geq 2$

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^2\left(1+\frac{1}{2}\right)^3\left(1+\frac{1}{3}\right)^4\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n=\frac{n^n}{(n-1)!}\,.$$

   (5 Punkte)

4. *(Abbildungen)*

   (a) Sei $f : A \to B$ eine Abbildung von A nach B. Definiere Injektivität, Surjektivität und Bijektivität für f. (5 Punkte)

   (b) Gegeben ist die Funktion

$$\begin{aligned} f:\ \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^4+2\,. \end{aligned}$$

   Ist f injektiv, surjektiv, bijektiv? Begründe deine Antworten. Im Falle einer negativen Antwort modifiziere Definitions- und/oder Zielmenge so, dass eine injektive, surjektive, bijektive Abbildung entsteht. (5 Punkte)