Familienname:
Vorname:
Matrikelnummer:
Studienkennzahl(en):

1
2
3
4
G

Note:

Einführung in das mathematische Arbeiten

Roland Steinbauer, Wintersemester 2003/04

2. Prüfungstermin (4.11.2003)

1. *(Kurvendsikussion)* Eine rationale Funktion $f(x) = \frac{x^2-ax}{x-b}$ besitzt einen Extrempunkt in $E = (4,1)$. Ermittle die Funktionsgleichung. (7 Punkte)

2. *(Analytische Geometrie)*

   (a) Gib eine Parameterdarstellung der Trägergeraden der Diagonalen $e = AC$ und $f = BD$ des Vierecks $ABCD$ mit

   $$A = (4,0,0),\ B = (0,3,3),\ C = (-4,0,0),\ D = (0,-3,-3)$$

   an. Berechne den Schnittpunkt der Diagonalen und gib eine Gerade an, die auf die beiden Trägergeraden normal steht. (8 Punkte)

   (b) Beweise die folgende Aussage: Ist $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ein Vektor im $\mathbb{R}^2$, dann sind die Vektoren $y = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$ und $z = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}$ Normalvektoren für x mit gleichem Betrag. (5 Punkte)

3. *(Mengen, Induktion)*

   (a) Sei A Teilmenge der Menge U. Wie lautet die Definition des Komplements von A in U? Formuliere die Gesetze von de Morgan und beweise eines davon. (5 Punkte)

   (b) Beweise die folgende Formel mittels vollständiger Induktion für alle natürlichen $n \geq 2$

   $$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1 \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \ldots \cdot \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = \frac{n^n}{n!}\,.$$

   (5 Punkte)

4. *(Gruppen)*

   (a) Definiere den Begriff einer Gruppe. (5 Punkte)

   (b) Auf $\mathbb{R}$ sei die Verknüpfung $\circ$ wie folgt definiert

   $$(x, y) \mapsto x \circ y := x + 2y.$$

   Untersuche diese Verknüpfung auf Assoziativität und Kommutativität. (5 Punkte)