**Familienname:**
**Vorname:**
**Matrikelnummer:**
**Studienkennzahl:**

| | |
|---|---|
| **1** | |
| **2** | |
| **3** | |
| **4** | |
| **5** | |
| **G** | |

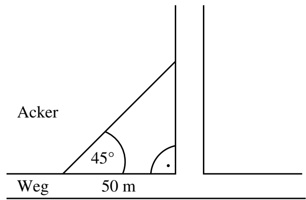
☐ **R. Steinbauer** **(WS03/04, 7. Termin)**
☐ **H. Schichl** **(SoSem04, 2. Termin)**

**Note:**

# Prüfung zu Einführung in das mathematische Arbeiten

(14.5.2004)

1. (a) *(Rechtwinkeliges Dreieck)* Ein rücksichtsloser Wanderer biegt 50 $m$ vor einer rechtwinkeligen Wegkreuzung unter einem Winkel von 45° ab und geht durch einen Acker (siehe Grafik).




   (i) Welche Weglänge erspart sich der Wanderer? (2 Punkte)
   (ii) Aufgrund des tiefen Bodens am Acker kommt der Wanderer nur mit der halben Geschwindigkeit voran, die er auf der Strasse hätte. Gewinnt er durch seine Abkürzung Zeit? (2 Punkte)

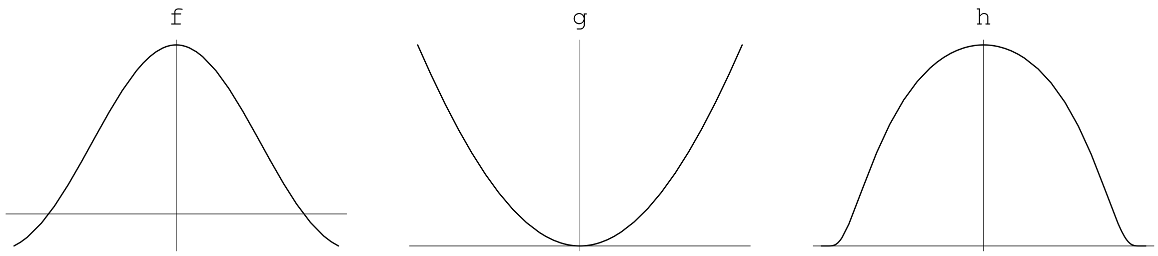
   (b) *(Kurvendiskussion)* Der Graph der rationalen Funktion

$$f(x) = \frac{ax+b}{x^2}$$

   hat in $W = (-1, -2)$ einen Wendepunkt.

   (i) Ermittle die Funktionsgleichung von $f$ sowie den maximalen Definitionsbereich. (3 Punkte )
   (ii) Bestimme alle Nullstellen, Hoch- und Tiefpunkte von $f$ und fertige eine Skizze an. (3 Punkte)
   (iii) Gib eine Stammfunktion von $f$ an. (2 Punkte)

2. *(Ableitungspuzzle)* Gegeben seien die Graphen der Funktionen $f$, $g$ und $h$.



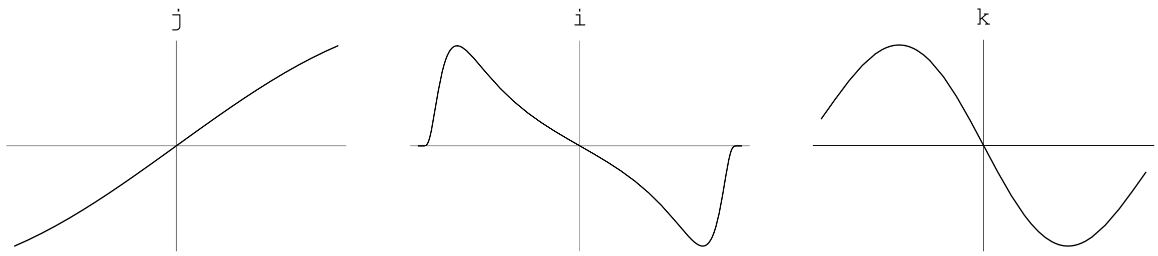

Welche der Funktionen $i$, $j$, $k$ (Graphen siehe unten) ist

(a) die erste Ableitung von $f$:

(b) die erste Ableitung von $g$:

(c) die erste Ableitung von $h$:

Begründe deine Auswahl! (4 Punkte)



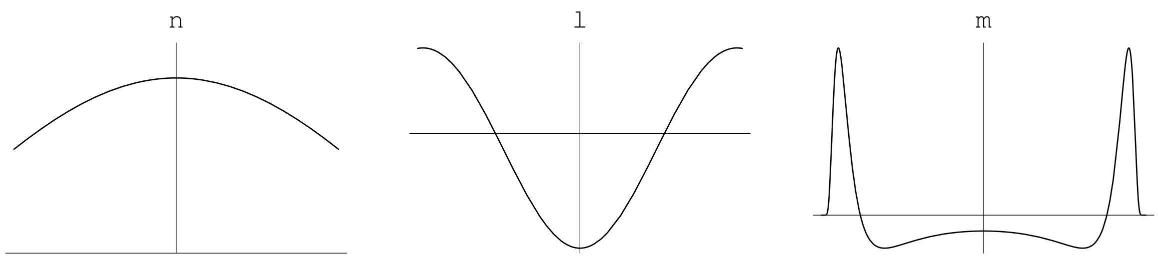

Welche der Funktionen $l$, $m$, $n$ (Graphen siehe unten) ist

(d) die zweite Ableitung von $f$:

(e) die zweite Ableitung von $g$:

(f) die zweite Ableitung von $h$:

Begründe deine Auswahl! (4 Punkte)



3. (a) *(Äquivalenzrelation)* Sei $M$ eine Menge und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $M$.
   i. Für $a \in M$ definiere den Begriff der Äquivalenzklasse $C_a$ von $a$. (2 Punkte)
   ii. Beweise, dass $C_a \neq \emptyset$ für alle $a \in M$ gilt. (1 Punkt)
   iii. Beweise, dass aus $a \sim b$ folgt, dass $b \in C_a$. (2 Punkte)

   (b) *(Algebra)* Sei $G = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$ zusammen mit der Verknüpfung $\circ$

$$(a_1, a_2) \circ (b_1, b_2) = (a_1 b_1, a_2 + a_1 b_2)$$

   gegeben. Überprüfe, ob $(G, \circ)$ eine Gruppe ist. (5 Punkte)

4. *(Funktionen)* Seien $A$ und $B$ Mengen und sei $f : A \to B$ eine Funktion.
   (a) Für $M \subseteq A$ definiere den Begriff des Bildes von $M$ unter $f$. (3 Punkte)
   (b) Für $N \subseteq B$ definiere den Begriff des Urbilds von $N$ unter $f$. (3 Punkte)
   (c) Gegeben seien die beiden Funktionen

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} h : [0, \infty) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2. \end{aligned}$$

   Bestimme die Mengen $g([-1, 1])$, $h((0, 1])$, $g^{-1}(2) = g^{-1}(\{2\})$ und $h^{-1}(2) = h^{-1}(\{2\})$. (4 Punkte)