Familienname:
Vorname:
Matrikelnummer:
Studienkennzahl:

1
2
3
4
G

☐ **R. Steinbauer** **(WS04/05, 2. Termin)**
☐ **H. Schichl** **(SoSem04, 6. Termin)**

Note:

Einführung in das mathematische Arbeiten

Wintersemester 2004/05, 19.11.2004

Gruppe A

1. (a) *(Analytische Geometrie)* Gegeben sind die Ebene

$$\varepsilon: \; x + 2y + 3z = -12$$

und die Gerade g durch die Punkte $P_1 = (-3, -4, -5)$ und $P_2 = (-3, -1, 7)$. Berechne die Koordinaten des Schnittpunkts der Geraden g mit der Ebene ε. (5 Punkte)

   (b) *(Gleichung)* Löse die Gleichung $-5e^{3y} + e^{6y} = -6$. (3 Punkte)

2. *(Kurvendiskussion)* Der Graph der Funktion

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

und der Graph der Funktion $g(x) = x^2 - 2x$ haben zwei Nullstellen gemeinsam. Im Wendepunkt $W = (0, 0)$ der Funktion f stehen die beiden Funktionsgraphen normal aufeinander (d.h. die beiden Tangenten stehen normal aufeinander).

   (a) Bestimme die Funktionsgleichung von f. (5 Punkte)

   (b) Bestimme alle Nullstellen, Hoch- und Tiefpunkte von f. (4 Punkte)

   (c) Berechne das von beiden Funktionsgraphen eingeschlossene Flächenstück. (3 Punkte)

3. *(Mengen, Äquivalenzelationen)*

   (a) Gib die Potenzmenge der Menge $A = \{\triangle, \square, \nabla\}$ an. (1 Punkt)

   (b) Gib eine Partition der Menge $B = \{\square, \diamond, \heartsuit, \triangle, \top, \sharp, \flat, \nabla, \bot\}$ an. (1 Punkt)

(c) Betrachte die durch die Partition in (b) definierte Äquivalenzrelation auf der Menge B (gemäß Theorem 4.2.11 aus der Vorlesung). (3 Punkte)
   - Gib die Äquivalenzklasse $C_\heartsuit$ von $\heartsuit$ an.
   - Bestimme die Durchschnittsmenge $C_\heartsuit \cap C_\diamondsuit$. Welche zwei Möglichkeiten kommen (gemäß Prop. 4.2.9) für $C_\heartsuit \cap C_\diamondsuit$ überhaupt in Betracht?
   - Gib den Quotientenraum an. Wieviele Elemente besitzt er?

4. *(Algebra)*

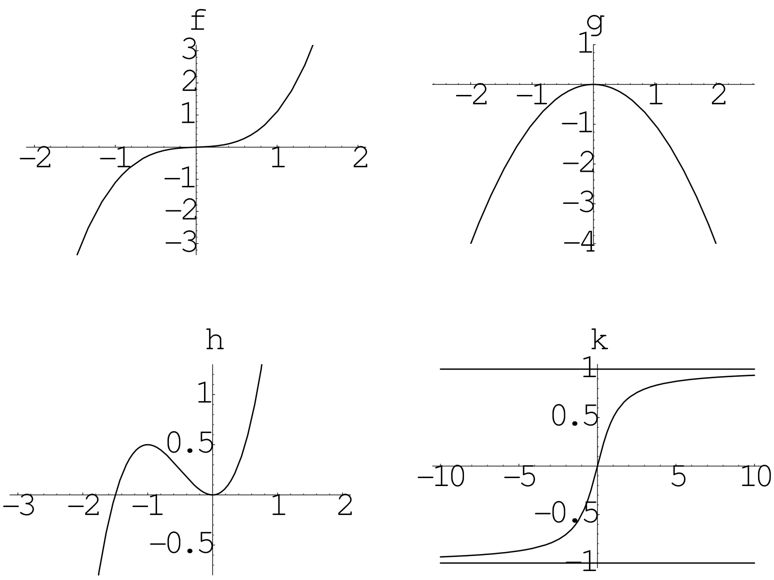
   (a) Seien $(G, \circ)$ und $(H, \Box)$ Gruppen. Definiere den Begriff eines Gruppenhomomorphismus von G nach H. Was ist ein Gruppenisomorhismus? (2 Punkte)

   (b) Wir betrachten $\mathbb{Q}$ zusammen mit der Operation $(x, y) \mapsto x \circ y := 12xy$. Bildet $(\mathbb{Q}, \circ)$ eine abelsche Gruppe? Welche der Gruppenaxiome gelten? (4 Punkte)

5. *(Abbildungen)* Sei $f : A \to B$ eine Abbildung von der Menge A in die Menge B.

   (a) Definiere Injektivität von f und zwar sowohl formal, als auch in Worten. (2 Punkte)

   (b) Sind die zu folgenden Graphen gehörenden Abbildungen als Funktionen von $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ injektiv, surjektiv, bijektiv? Wenn nein, schränke Definitions- und/oder Bildmenge geeignet ein, um die jeweilige Abbildung bijektiv zu machen. (7 Punkte)



Hinweis: Die obigen Graphen sind so zu lesen, dass sich außerhalb des gezeigten Bereichs nichts Wesentliches mehr „abspielt".