Familienname:
Vorname:
Matrikelnummer:
Studienkennzahl(en):

1
2
3
4
G

Note:

Einführung in das mathematische Arbeiten

Roland Steinbauer, Wintersemester 2004/05

3. Prüfungstermin (10.12.2004)

1. *(Kurvendiskussion)*

   (a) Ermittle die Koeffizienten der Polynomfunktion 3. Grades, $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
   $$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$
   deren Graph in $E_1 = (3, y_1)$ einen Extrempunkt und in $W = (2, y_w)$ den Wendepunkt hat. Die Gleichung der Wendetangente lautet $t_w : \; 3x + y = 4$. (5 Punkte)

   (b) Bestimme Nullstellen und Hoch- sowie Tiefpunkte von p. (4 Punkte)

   (c) Skizziere den Funktionsgraphen im Intervall $[0, 4]$ und berechne das Flächenstück, das vom Funktionsgraphen und der x-Achse zwischen den Nullstellen eingeschlossen wird. (3 Punkte)

2. (a) *(Analytische Geometrie)* Berechne die Gleichung des Kreises k, mit Mittelpunkt im 2. Quadranten der durch den Punkt $P = (-12, 9)$ geht, die y-Achse berührt und den Kreis
   $$k^* : \qquad (x + 6)^2 + y^2 = 9$$
   von außen berührt. (5 Punkte)

   (b) *(Ungleichungen)* Bestimme die Lösungsmengen der folgenden Ungleichungen

   - $0 < e^x \leq 1$,
   - $|1 - 2x| \leq 3x + 1$.

   (2 Punkte)

3. (a) *(Algebra)* Beweise die Aussage: In einer Gruppe ist das neutrale Element eindeutig bestimmt. (5 Punkte)

   (b) *(Logik 1)* Verneine die folgenden Aussagen

   - $\forall x \in M \; \exists y \in M : \; A(x, y)$,
   - $\exists! x \in M : \; \forall y \in M : \; B(x, y)$.

   Hier ist M eine beliebige Menge, A und B sind beliebige Aussagen. (2 Punkte)

   (c) *(Logik 2)*

   - Was versteht man unter der disjunktiven Normalform einer Schaltung?
   - Bestimme die disjunktive Normalform der Schaltung f mit der folgenden Schaltwerttabelle.

a	b	c	$f(a,b,c)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

   (3 Punkte)

4. (a) *(Abbildungen 1)* Skizziere den Graphen einer Funktion $f : \; \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften

   - f ist surjektiv aber nicht injektiv,
   - f ist injektiv aber nicht surjektiv,
   - f ist weder injektiv noch surjektiv,

   (3 Punkte)

   (b) *(Abbildungen 2)* Sei $f : A \to B$ eine Abbildung von der Menge A in die Menge B.

   - Seien $M \subseteq A$ und $N \subseteq B$. Wie lautet die Definition des Bildes $f(M)$ von M unter f und des Urbilds $f^{-1}(N)$ von N unter f. (2 Punkte)
   - Seien $N_1, \; N_2 \subseteq B$. Formuliere die Aussage

   $$f^{-1}(N_1 \cap N_2) = f^{-1}(N_1) \cap f^{-1}(N_2)$$

   in Worten und beweise sie. (5 Punkte)