FWF-Forschungsprojekt P12023-MAT

Distributionelle Methoden in Einsteins Gravitationstheorie

Abschlussbericht

April 2002

H. Urbantke

J. M. Heinzle
M. Kunzinger
R. Steinbauer

Zusammenfassung

Das Projekt P12023-MAT „Distributionelle Methoden in Einsteins Gravitationstheorie“ konnte im Herbst 2001 nach insgesamt fast vierjähriger Laufzeit äußerst erfolgreich abgeschlossen werden. Es wurden nicht nur alle im Projektantrag formulierten Ziele erreicht, sondern auch weit darüber hinaus wichtige Resultate erzielt und neue Forschungsschwerpunkte gesetzt. Neben der Lösung konkreter Problemstellungen in der Allgemeinen Relativitätstheorie mit den Methoden der Algebren verallgemeinerter Funktionen konnte vor allem die Entwicklung einer Geometrischen Theorie nichtlinearer verallgemeinerter Funktionen vorangetrieben werden.

Die aus dem Projekt enstandenen Publikationen sind sowohl in qualitativer als auch quantitativer Hinsicht herausragend und übertreffen bei weitem das projektierte Ausmaß.

Contents

I. PROJEKTZIELE

Das Projekt *Distributionelle Methoden in Einsteins Gravitationstheorie* hatte zum Ziel, distributionelle Methoden – vor allem die von J. F. Colombeau entwickelte neue Theorie der Algebren verallgemeinerter Funktionen – in die Allgemeine Relativitätstheorie einzubringen.

Die von L. Schwartz Mitte des vorigen Jahrhunderts entwickelte Distributionentheorie ([Sch66]) erlaubt die mathematisch konsistente Beschreibung sehr singulärer Größen (Dirac-Maß, etc.) und hat sowohl in der Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen, als auch in linearen Feldtheorien der Physik breite Anwendung gefunden. Allerdings ist sie eine *genuin lineare* Theorie – *der* grundlegende Begriff ist der des linearen Funktionals auf gewissen Funktionenräumen; Allgemeine Produkte können nicht widerspruchsfrei definiert werden. Daraus ergeben sich grundlegende konzeptionelle Probleme bei der Anwendung in nichtlinearen Situationen.
Für den Fall der *genuin nichtlinearen* Allgemeinen Relativitätstheorie – ihre Feldgleichungen, die Einstein-Gleichungen nehmen in geeigneten Koordinaten die Form eines gekoppelten Systems von quasilinearen partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung für die Koeffizienten der Raumzeit-Metrik an – haben R. Geroch und J. Traschen diesen Sachverhalt in ihren berühmten „No-Go-Theoremen“ ([Ger87]) klar analysiert. Anwendungen der linearen Distributionentheorie in der Allgemeinen Relativitätstheorie müssen daher auf sehr spezielle Problemstellungen und die Verwendung von wenig allgemeinen ad-hoc-Methoden beschränkt bleiben (siehe zB [Lic71], [Tau80], [Cho93], [Bal95]). Eine konsistente Beschreibung singulärer Raumzeit-Geometrien – deren große physikalische Relevanz durch die Singularitätentheoreme von R. Penrose und S. Hawking belegt ist (siehe zB [Haw73], Kap. 7) – ist mit diesen Methoden nicht möglich. Insbesondere führt die Behandlung kosmischer Strings oder von Schwarz-Loch-Geometrien der Kerr-Newman Familie (darunter *der* Prototyp einer singulären Raumzeit: die Schwarzschild Lösung) im linearen distributionellen Rahmen nur zu unbefriedigenden Ergebnissen.

Hier kommt die von J. F. Colombeau ([Col84], [Col85], [Col90a], [Col92]), M. Oberguggenberger ([Obe92]), E. E. Rosinger ([Ros78], [Ros80]) und anderen seit Anfang der 80er Jahre entwickelte Theorie der *Algebren verallgemeinerter Funktionen* ins Spiel. Dabei handelt es sich um Differentialalgebren, die die Algebra der glatten Funktionen als Teilalgebra und den Vektorraum der Distributionen als Teilraum enthalten und maximale Konsistenzeigenschaften mit der klassischen Analysis – im Sinne des Unmöglichkeitsresultats von L. Schwartz ([Sch54]) – aufweisen. Im konstruktiven Zugang Colombeaus werden die Algebren durch eine Quotientenbildung in der Differentialalgebra $(\mathcal{C}^\infty)^I$ gewonnen, wobei I die Wertemenge eines geeigneten Regularsierungsparameters ist. Die Grundidee der *Regularisierung durch glatte Funktionen* wird durch die (für die Klassenbildung verwendeten) konkreten *asymptotischen Abschätzungen in Ordnungen des Regularisierungsparameters* zum mächtigen analytischen Werkzeug.
Die Theorie der Algebren verallgemeinerter Funktionen entwickelte sich schnell zu einem wichtigen Werkzeug bei der Behandlung nichtlinearer partieller Differentialgleichungen, mit nichtglatten Koeffizienten, Anfangsdaten oder prospektiven Lösungen (siehe zB [Bia92a], [Bia92b], [Col90b], [Col93], [Col94a], [Key95], [Obe92] und für Anwendungen in der Numerik zB [Bia90], [Ber95], [Ber93]). Es steht sofort ein stabiler Lösungsbegriff für derartige Gleichungen zu Verfügung.

Auf dieser Entwicklungsstufe setzt das Projektziel an: Diese vorhandenen Methoden sollen für die Verwendung in der Allgemeinen Relativitätstheorie adaptiert und angepasst werden und mit ihrer Hilfe konkrete Problemstellungen in der Beschreibung singulärer Raumzeiten gelöst werden.

II. PROJEKTORGANISATION

Die Projektlaufzeit erstreckte sich von November 1997 bis August 2001. Dieser außergewöhnlich große Zeithorizont konnte durch umsichtige Finanzgebarung und kostenneutrale Umschichtung der ursprünglich für die Anstellung eines Projektmitarbeiters (Doktorandenstelle) für den Zeitraum von 2 Jahren vorgesehenen Mittel erreicht werden.

Der im Projektantrag vorgesehene Mitarbeiter *Roland Steinbauer* stand zu Projektbeginn (wegen Verlängerung seines Dissertationsstipendiums seitens der Österreichischen Akademie der Wissenschaften) nicht zur Verfügung. Stattdessen konnte *J. Mark Heinzle* als Mitarbeiter gewonnen und von November 1997 bis April 1998 über eine „Forschungsbeihilfe für Diplomanden“ finanziert werden.
Sodann war Roland Steinbauer von Mai 1998 bis Oktober 1999 über einen Dienstvertrag auf einer Doktorandenstelle angestellt. Allerdings erreichte das Beschäftigungsausmaß nur im Mai und Juni 1998 die vollen 40 Stunden; Aufgrund einer Anstellung als halbbeschäftigter Vertragsassistent am Institut für Mathematik der Universität Wien wurde ab Juli 1998 das Beschäftigungsausmaß im Rahmen des Projekts auf die Hälfte reduziert.

Als Roland Steinbauer im November 1999 eine volle Stelle als Vertragsassistent am Institut für Mathematik übernahm, konnte erneut J. Mark Heinzle diesmal als halbbeschäftigter Forschungsmitarbeiter auf Dienstvertragsbasis bis Oktober 2000 angestellt werden.
Danach wurde das Projekt bis zum Juni 2001 unterbrochen. Im Juli und August 2001 schließlich konnten *Michael Kunzinger* und erneut Roland Steinbauer als Forschungsmitarbeiter angestellt und ihnen so ein längerer Forschungsaufenthalt an der University of Southampton (UK) ermöglicht werden.

Außerdem konnten im Rahmen des Projekts folgende Konferenzteilnahmen finanziert werden: R. Steinbauer nahm am „Spanish Relativity Meeting (ERE99)" im September 1999 an der University of the Basque Country in Bilbao, Spanien teil. M. Kunzinger und R. Steinbauer absolvierten im Juli 2001 einen Forschungsaufenthalt in Durban, Südafrika, der mehrere Zusammentreffen mit E. E. Rosinger und den Besuch der „16th Conference on General Relativity and Gravitation (GR16)" inkludierte.

III. ENTWICKLUNGSLINIEN

Zunächst war die Hauptstoßrichtung des Projekts – wie auch im Projektantrag ausgeführt – eine Adaption der oben angesprochenen Methoden der nichtlinearen verallgemeinerten Funktionen für die **Anwendung in konkreten Problemstellungen der Allgemeinen Relativitätstheorie**.

Erster Problemkreis war die *distributionelle Beschreibung von impulsiven pp-Wellen*, einer Klasse von stark singulären (die Metrik enthält die δ-Distribution) Raumzeit-Geometrien der Form

$$ds^2 \,=\, f(x,y)\delta(u)du^2 - dudv + dx^2 + dy^2\,, \tag{1}$$

die Gravitationsstoßwellen modellieren ([Pen72]) und bei hochenergetischen Streuprozessen (resp. bei deren Beschreibung im Rahmen einer noch zu findenden Theorie der Quantengravitation, siehe etwa [De 89]) eine prominente Rolle spielen.
Zunächst konnte in den Arbeiten [J1] und [J2] teilweise aufbauend auf früheren Ansätzen ([Fer90], [Bal97]) eine vollständige distributionelle Beschreibung der Geodäten in diesen Raumzeiten erzielt werden. Diese Ergebnisse lieferten außerdem den Schlüssel zur mathematischen Klärung einer lange offenen Frage: neben der distributionellen Form (1) der Metrik werden impulsive pp-Wellen auch häufig mittels einer stetigen Metrik modelliert. Diesen beiden Formen der Metrik können – obwohl physikalisch äquivalent (siehe zB [S2]) – nur durch eine unstetige und klassisch distributionell nicht definierte Transformation ineinander übergeführt werden, die daher keinen zulässigen Koordinatenwechsel im Sinne der Allgemeinen Relativitätstheorie darstellt. In der Publikation [J3] – die von den Editoren des Journals zu einem der „Highlights" zweier Erscheinungsjahre gewählt wurde (neben Arbeiten von Fieldsmedaillen-Gewinnern und eines Nobellpreisträgers) – konnte gezeigt werden, dass die beiden Formen der Metrik durch eine verallgemeinerte Koordinatentransformation im Sinne der Theorie der Algebren verallgemeinerter Funktionen ineinander übergeführt werden können. Darüber hinaus konnte eine befriedigende physikalische Interpretation der verwendeten Methodik gegeben werden.

Als Fortsetzung dieser Entwicklungen wurde in Kooperation mit Jirí Podolský vom Institut für Theoretische Physik der Karlsuniversität Prag die distributionelle Untersuchung der allgemeineren Klasse der *sphärischen impulsiven Gravitationswellen* begonnen. Diese modellieren kugelförmige Gravitationsstoßwellen und besitzen eine wesentlich reichhaltigere Struktur (vgl. etwa [Pod99]) als die impulsiven pp-Wellen, wie auch aus der komplizierteren Form der distributionellen Metrik

$$ds^2 \,=\, 2\,\frac{w^2}{\psi^2}\,|d\xi - f\,\delta(u)du\,|^2 + 2\,du\,dw - 2\epsilon\,du^2 + w\Big[(f_\xi + \bar{f}_{\bar{\xi}}) - \frac{2\epsilon}{\psi}(f\bar{\xi} + \bar{f}\xi)\Big]\delta(u)du^2 \tag{2}$$

hervorgeht. Diese Beschreibung der Raumzeit – die Metrik enthält undefinierte Quadrate des Dirac-Maßes – wurde erstmals von J. Griffiths und J. Podolský ([Pod99]) mittels einer rein formalen Transformation mit der Standardform von Robinson und Trautman in Verbindung gebracht. Es stellt sich analog zum Falle der pp-Wellen die Frage nach einer mathematisch Beschreibung dieser Transformation. Die Untersuchung der Geodäten von (2) ist Gegenstand der Arbeit [J4] und soll den Grundstein zur Lösung der oben formulierten Fragestellung legen.

Weiters wurde im Rahmen des Projekts die prominenteste singuläre Lösung der Einstein-Gleichungen, die Schwarzschild Raumzeit behandelt. In der Publikation [J5] konnte unter Verwendung der Geometrischen Theorie verallgemeinerter Funktionen (siehe unten) nicht nur ein vereinheitlichter Rahmen geschaffen werden, indem alle bisherigen

distributionellen Zugänge zur Schwarzschildmetrik (etwa [Bal93], [Kaw97]) diskutiert werden können, sondern unter Zuhilfenahme der Kerr-Schild Struktur der Metrik erstmals eine konzeptionell zufriedenstellende Berechnung des physikalisch plausiblen Energie-Impuls Tensors angegeben werden.
Darüber hinaus konnte in der Arbeit [J6] die Schwarzschildmetrik auch aus dem Gesichtspunkt der Hadamard Regularisierungen erfolgreich behandelt werden. Insbesondere die Theorie der Pseudofunktionen ([Bla00]) stellt eine alternative Theorie nichtlinearer Distributionen dar. Dieser zur Colombeau Theorie komplementäre Zugang ermöglicht eine besonders effektive Handhabung der punktförmigen Singularitäten, wie sie gerade bei Schwarzschild auftreten. Die gewonnen Resultate stehen im perfekten Einklang mit den oben beschriebenen Ergebnissen.

Neben der Lösung dieser konkreten allgemein relativistischen Problemstellungen konnten durch die intensive Zusammenarbeit mit Mathematikern an der Universität Wien (teilweise unterstützt vom FWF-Projekt P10472-MAT, „Nichtlineare Transformationsgruppen für verallgemeinerte Funktionen") wichtige Synergien genutzt werden, die eine weitere Entwicklungslinie der Projekts eröffnete, die **Geometrische Theorie verallgemeinerter Funktionen**.

Eines der Grundprinzipien der Allgemeinen Relativitätstheorie ist das allgemeine Kovarianzprinzip: Es gibt kein ausgezeichnetes Koordinatensystem. Mathematisch drückt sich dieser Sachverhalt in der Diffeomorphismeninvarianz der Theorie aus – die Bühne der Relativitätstheorie ist eine (4-dimensionale) Pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit. Die Theorie der Algebren verallgemeinerten Funktionen wurde wie oben erwähnt hauptsächlich für Anwendungen auf partielle Differentialgleichungen konzipiert, wo Diffeomorphismeninvarianz eine untergeordnete Rolle spielt. Tatsächlich ließ die verbreitetste Variante der Theorie – die sogenannten *vollen Algebren*, die eine kanonische Einbettung der Schwartzschen Distributionen erlauben – die Eigenschaft der Diffeomorphismeninvarianz vermissen; einige der Grundbausteine der Konstruktion sind nicht koordinateninvariant definiert.
Unter dem Einfluss geometrischer Anwendungen in der Lie Gruppen Analyse von Differentialgleichungen (siehe etwa [Kun00] und [Dap02]) und in der Allgemeinen Relativitätstheorie (nicht zuletzt die im Projektrahmen erzielten Resultate; für einen Überblick siehe [Vic99]) ergab sich eine Verschiebung des Schwerpunkts in der Theorie der nichtlinearen verallgemeinerten Funktionen selbst; die Geometrisierung der Konstruktion war zentrale Problemstellung geworden.

Aufbauend auf Arbeiten von J. F. Colombeau und A. Meril ([Col94b]) und J. Jelínek ([Jel99]) gelang in der Publikation [J7] (gemeinsam mit M. Grosser und E. Farkas, beide vom Institut für Mathematik der Universität Wien) erstmals die Konstruktion einer *diffeomorphismeninvarianten vollen Colombeau Algebra*. Die Konstruktion erfolgt lokal auf offenen Mengen des Euklidischen Raumes und verwendet zur Bewältigung der notwendigen Analysis in unendlichdimensionalen Räumen den Kalkül in geeigneten Vektorräumen nach A. Kriegl und P. Michor ([Kri97]).
Anwendungen in der Allgemeinen Relativitätstheorie stellen darüber hinaus allerdings den Anspruch einer globalen Konstruktion; Alle verwendeten Ingredenzien müssen global auf der Mannigfaltigkeit definiert sein. Eine derartige Konstruktion konnte erstmals in der Arbeit [J8] (gemeinsam mit M. Grosser und J. Vickers vom Department of Mathematics der University of Southampton, UK) angegeben werden. Sie liefert eine global definierte Differentialalgebra (bzgl. der Lie Ableitung) von (skalaren) verallgemeinerter Funktionen auf einer glatten Mannigkaltigkeit und eine kanonische Einbettung des Vektorraums der Distributionen, sodass Lie Ableitung und Einbettung vertauschen.

Eine andere wichtige Variante der Theorie der nichtlinearen verallgemeinerten Funktionen – die *speziellen Algebren* – bietet zwar nicht die Möglichkeit einer *kanonischen* Einbettung der Distributionen, läßt aber besonders flexible Modellierungen singulärer Größen im Anwendungskontext zu; diese Algebren sind per definitionem diffeomorphismeninvariant und eignen sich daher besonders gut für geometrische Anwendungen.
Aufbauend auf Arbeiten von J. W. De Roever und M. Damsma ([De 91]) sowie der Gruppe um S. Pilipović an der Universität von Novi Sad, Jugoslawien ([Dap96]) konnte in der Publikation [J9] eine vollständige geometrische Theorie *verallgemeinerter Schnitte in Vektorbündeln* entwickelt werden, die maximale Konisitenzeigenschaften in bezug auf die klassische distributionelle Theorie von G. De Rham (De Rhamsche Ströme, [De 84]), und J. E. Marsden ([Mar68]) aufweist. Darüber hinaus konnte die Punktwertecharakterisierung für verallgemeinerte Funktionen im $\mathbb{R}^n$ ([Obe99]) auf Mannigfaltigkeiten verallgemeinert werden.
Diese Konstruktionen konnte in der Publikation [J10] zu einer verallgemeinerten Pseudo-Riemannschen Geometrie erweitert werden, die erstmals ein vollständiges und konsistentes distributionelles Setting zur Behandlung singulärer Raumzeit-Geometrien der Allgemeinen Relativitätstheorie zur Verfügung stellt und somit den klassisch distributionellen Rahmen von P. Parker ([Par79]) wesentlich erweitert.

Schließlich wurde in der Publikation [J11] das Studium von verallgemeinerten Funktionen *mit Werten in einer glatten Mannigfaltigkeit* begonnen. Ein analoges Konzept ist im klassisch distributionellen Rahmen nicht verfügbar; seine Notwendigkeit etwa bei der Berechnung von Flüssen distributioneller Vektorfelder oder der Geodäten nicht glatter Metriken ist aber evident. Der Schlüssel zur Konstruktion ist hier eine kartenunabhängige Charakterisierung der asymptotischen Abschätzungen im Regularisierungsparameter.
Diese lokale Charakterisierung konnte in der Arbeit [J12] (gemeinsam mit J. Vickers) durch ein einfaches globales Kriterium ersetzt werden. Diese neue Charakterisierung gestattet die Konstruktion einer globalen und funktoriellen

Theorie sowohl von verallgemeinerten Funktionen mit Werten in einer Mannigfaltigkeit, als auch von verallgemeinerten Vektorbündelhomomorphismen. Insbesondere konnte auch eine Punktwertecharakterisierung in beiden Fällen bewiesen werden.
Schließlich beschäftigt sich die darauf aufbauende Arbeit [J13] (gemeinsam mit M. Oberguggenberger vom Institut für Technische Mathematik, Geometrie und Bauinformatik der Universität Innsbruck und J. Vickers) mit den Flüssen nichtglatter Vektofelder. Insbesondere wird hier die klassiche Theorie von J. E. Marsden ([Mar68]) erweitert und eine Fülle relevanter Beispiele behandelt.

In der Arbeit [J14] (gemeinsam mit J. Vickers) wurde das Studium verallgemeinerter Konnexionen in Hauptfaserbündeln initiiert.

Eine umfassende Ausarbeitung der Geometrischen Theorie verallgemeinerter Funktionen inklusive ihrer Anwendungen sowohl in der Lie Gruppen Analyse von Differentialgleichungen als auch der Allgemeinen Relativitätstheorie konnte in Buchform ([B1]) (gemeinsam mit M. Grosser und M. Oberguggenberger) vorgelegt werden.

IV. KOOPERATIONEN

Während der Projektlaufzeit konnten die Projektmitarbeiter eine Reihe von interessanten nationalen und internationalen Kontakten knüpfen und fruchtbare Kooperationen initiieren bzw. ausbauen.

An erster Stelle muss hier die Gründung der Arbeitsgruppe DiANA (DIfferential Algebras and Nonlinear Analysis; `http://www.mat.univie.ac.at/~diana`) mit den Mitgliedern M. Grosser, G. Hörmann, M. Kunzinger, E. Farkas und R. Steinbauer von der Universität Wien und M. Oberguggenberger von der Universität Innsbruck genannt werden. Diese Gruppe wurde auf Initiative von M. Kunzinger 1997/98 in Leben gerufen und beschäftigt sich mit der Weiterentwicklung der Theorie der Algebren verallgemeinerter Funktionen und insbesondere ihren Anwendungen in der Mathematischen Physik. Die intensive und vielfältige Zusammenarbeit innerhalb dieser Gruppe hat bereits zu einer Vielzahl hervorragender Publikationen geführt.

Eine sehr enge Kooperation entstand mit der Arbeitsgruppe um C. J. S. Clarke, J. Vickers und J. Wilson am Department of Mathematics an der University of Southampton, UK. Hier liegt der Schwerpunkt bei Anwendungen der verallgemeinerten Funktionen in der Allgemeinen Relativitätstheorie sowie der Konstruktion dafür geeigneter *voller* Algebren. Während der Projektlaufzeit konnten mehrere Besuche von J. Vickers und J. Wilson in Österreich, sowie ein mehrmonatiger Forschungsaufenthalt von M. Kunzinger und R. Steinbauer in Southampton realisiert werden.

Auf dem Gebiet der impulsiven Gravitationswellen konnte eine Zusammenarbeit mit J. Podolský vom Institut für Theoretische Physik der Karlsuniversität Prag ins Leben gerufen werden. M. Kunzinger, R. Steinbauer und H. Urbantke konnten mehrere erfolgreiche Forschungsaufenthalte in Prag, J. Podolský einen in Wien absolvieren.

Während des Forschungsaufenthalts von M. Kunzinger und R. Steinbauer in Durban, Südafrika konnte einerseits der schon länger bestehende Kontakt zwischen der Arbeitsgruppe DiANA und einem der Väter der Theorie der Algebren verallgemeinerter Funktionen, E. E. Rosinger gepflegt und weitere Kooperationen initiiert werden. So kam u.a. ein reger wissenschaftlicher Austausch mit J. Griffiths von der Loughborough University, UK und mit B. Nolan von der Dublin City University, Irland zustande. Letzterer wird in den nächsten Wochen zu einem Forschungsaufenthalt in Wien und Innsbruck erwartet.

Schließlich konnten die ebenfalls schon länger bestehenden Kontakte zur Forschungsgruppe um S. Pilipović an der Universität von Novi Sad, Jugoslawien weiter ausgebaut werden. Der Grundstein zur Konstruktion der ersten diffeomorphismeninvarianten Colombeau Algebra wurde 1998 während eines Workshops am Department für Mathematik an der Universität von Novi Sad gelegt.

V. PROJEKTERGEBNISSE

Zu unserer großen Zufriedenheit kann festgestellt werden, dass nicht nur alle Projektziele zur Gänze erreicht wurden, sondern auch weit darüber hinaus neue Forschungsrichtungen eröffnet und wichtige Resultate erzielt werden konnten. Das vorliegende Projekt hat einerseits in der Lösung konkreter allgemeinrelativistischer Problemstellungen die im Projektantrag fromulierten Ziele weit übertroffen; andererseits war es Anstoß und eine der treibenden Kräfte bei der Entwicklung der Geometrischen Theorie verallgemeinerter Funktionen. Besonders in diesem Bereich konnten wichtige und schwierige Fragen gelöst und das Tor zu einem weiten Feld neuer Entwicklungen aufgestoßen werden – sowohl betreffend die mathematische Theorie, als auch in bezug auf ihre Anwendungen in der Mathematischen Physik und insbesondere der Allgemeinen Relativitätstheorie.

Insgesamt konnten zum Projektthema 9 Publikationen in internationalen Fachzeitschriften fertiggestellt werden; einige davon sind in den Top-10 Journalen der Mathematik erschienen. Fünf weitere Arbeiten liegen entweder als Preprint vor oder sind bei internationalen Journalen zur Publikation eingereicht. Desweiteren konnte das Buchprojekt [B1] – das allerdings weit über das Projektthema hinausgeht – erfolgreich abgeschlossen werden. Eine detaillierte Darstellung des Kernthemas des Projekts findet sich in der Dissertation von Roland Steinbauer ([P1]).

Außerdem konnten 7 Publikationen in internationalen Sammelbänden erstellt und 23 Vorträge bei internationalen Fachtagungen bzw. auf renommierten Instituten zum Projektthema gehalten werden.

Detaillierte Liste der Publikationen und Vorträge

1. Konkrete Anwendungen in der Allgemeinen Relativitätstheorie

A Journalpublikationen

[J1] Steinbauer, R. Geodesics and geodesic deviation for impulsive gravitational waves. *J. Math. Phys.*, **39**:2201–2212, 1998.

[J2] Kunzinger, M., Steinbauer, R. A rigorous solution concept for geodesic and geodesic deviation equations in impulsive gravitational waves. *J. Math. Phys.*, **40**:1479–1489, 1999.

[J3] Kunzinger, M., Steinbauer, R. A note on the Penrose junction conditions. *Class. Quant. Grav.*, **16**:1255–1264, 1999.

[J4] Podolský, J., Steinbauer, R. Geodesics in spacetimes with expanding impulsive gravitational waves. *Preprint*, 2001.

[J5] Heinzle, J. M., Steinbauer, R. Remarks on the distributional Schwarzschild geometry. *J. Math. Phys.*, **43**:1493–1508, 2002.

[J6] Heinzle, J. M. Hadamard regularization of the Schwarzschild geometry. *Preprint*, 2002.

B Publikationen in Sammelbänden

[S1] Steinbauer, R. Distributional description of impulsive gravitational waves. In Grosser, M., Hörmann, G., Kunzinger, M., Oberguggenberger, M., editor, *Nonlinear Theory of Generalized Functions*, volume 401 of *Chapman & Hall/CRC Research Notes in Mathematics*, pages 267–274, Boca Raton, 1999. CRC Press.

[S2] Steinbauer, R. On the geometry of impulsive gravitational waves. In Vulcanov, D., Cotaescu, I., editor, *Proceedings of the 8th Romanian Conference on General Relativity and Gravitation*. Mirton Publishing House, 1999.

[S3] Steinbauer, R. On the impulsive limit of gravitational waves. In Ibanez, J., editor, *Recent Developments in Gravitation, Proceedings of the Spanish Relativity Meeting. ERE-99*, pages 307–312. Universidad del Pais Vasco, 2000.

[S4] Steinbauer, R. Nonlinear distributional geometry and general relativity. Contribution to Proceedings of the International Conference on Generalized Functions (ICGF 2000, Guadeloupe). erscheint in *Integral Transf. Special Funct.*, 2002.

C Sonstige Publikationen

[P1] Steinbauer, R. Distributional Methods in General Relativity. *Dissertation*, Universität Wien, 2000.

[P2] Steinbauer, R. Distributionelle Krümmung von Strings. *Seminarnotiz*, 1998.

D Vorträge

[V1] Steinbauer, R. Distributional Description of Impulsive Gravitational Waves. VIII Romanian Conference on General Relativity and Gravitation. Bistrita, Rumänien, Juni 1998.

[V2] Steinbauer, R. Nonlinear Generalized Functions and General Relativity. Workshop: Nonlinear Theory of Generalized Functions. Department of Mathematics, Univeristy of Novi Sad, Yugoslawien, Juli 1998.

[V3] Steinbauer, R. ,,Discontinuous Diffeomorphisms". Workshop: Nonlinear Theory of Generalized Functions. Department of Mathematics, Univeristy of Novi Sad, Yugoslawien, Juli 1998.

[V4] Steinbauer, R. On the Geometry of Impulsive Gravitational Waves. 2nd Samos Meeting on Cosmology, Geometry and Relativity ,,Mathematical & Quantum Aspects of Relativity and Cosmology". Pythagoreon, Griechenland, August 1998.

[V5] Steinbauer, R. Impulsive Robinson-Trautman Lösungen. Institut für Techn. Mathematik, Geometrie u. Bauinformatik, Universität Innsbruck, Juni 1999.

[V6] Steinbauer, R. On the impulsive limit of gravitational waves. Spanish Relativity Meeting (ERE99). University of the Basque Country, Bilbao, Spanien, September 1999.

[V7] Steinbauer, R. Colombeau algebras and multiplication of distributions. Institute for Theoretical Physics, Karlsuniversität Prag, November 1999.

[V8] Steinbauer, R. Colombeau algebras in general relativity: Impulsive waves and other topics. Institute for Theoretical Physics, Karlsuniversität Prag, November 1999.

[V9] Steinbauer, R. Applications of generalized functions in general relativity. International Conference on Generalized Functions (ICGF 2000). Universite' des Antilles et de la Guyane, Guadeloupe, Frankreich, April 2000.

[V10] Kunzinger, M. Algebras of generalized functions and general relativity. Department of Mathematics, University of Southampton, UK, Juli 2001.

[V11] Steinbauer, R. Spherical impulsive gravitational waves. Department of Mathematics, University of Southampton, UK, Juli 2001.

[V12] Kunzinger, M. Nonlinear distributional geometry for General Relativity. 16th Conference on General Relativity and Gravitation (GR16). Durban, South Africa, Juli 2001.

[V13] Steinbauer, R. Geodesics in expanding impulsive gravitational waves. 16th Conference on General Relativity and Gravitation (GR16). Durban, South Africa, Juli 2001.

[V14] Heinzle, J. M. Distributional description of the Schwarzschild geometry. Department of Mathematics, University of Southampton, UK, August 2001.

[V15] Steinbauer, R. Generalized pseudo-Riemannian geometry for general relativity. Journees Relativistes 2001. Dublin, Irland, September 2001.

2. Geometrische Theorie verallgemeinerter Funktionen

A Buch

[B1] Grosser, M., Kunzinger, M., Oberguggenberger, M., Steinbauer, R. *Geometric Theory of Generalized Functions with Applications to Relativity*, volume **537** of *Mathematics and its Applications*. Kluwer, 2001.

B Journalpublikationen

[J7] Grosser, M., Farkas, E., Kunzinger, M., Steinbauer, R. On the foundations of nonlinear generalized functions I, II. *Mem. Am. Math. Soc.*, **153**(729), 2001.

[J8] Grosser, M., Kunzinger, M., Steinbauer, R., Vickers, J. A global theory of algebras of generalized functions. *Adv. Math.*, **166**(1):179–206, 2002.

[J9] Kunzinger, M., Steinbauer, R. Foundations of a nonlinear distributional geometry. *Acta Appl. Math.*, **71**:179–206, 2002.

[J10] Kunzinger, M., Steinbauer, R. Generalized pseudo-Riemannian Geometry. erscheint in *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2002.

[J11] Kunzinger, M. Generalized functions valued in a smooth manifold. erscheint in *Monatshefte Math.*, 2002.

[J12] Kunzinger, M., Steinbauer, R., Vickers, J. Intrinsic characterization of manifold-valued generalized functions. *eingereicht*, 2002.

[J13] Kunzinger, M., Oberguggenberger, M., Steinbauer, R., Vickers, J. Generalized flows and singular ODEs on differentiable manifolds. *Preprint*, 2002.

[J14] Kunzinger, M., Steinbauer, R., Vickers, J. Generalized connections and curvature. *Preprint*, 2002.

C Publikationen in Sammelbänden

[S5] Grosser, M., Kunzinger, M., Steinbauer, R., Urbantke, H., Vickers, J. Diffeomorphism invariant construction of nonlinear generalized functions. In Neugebauer, G., Collier, R., editor, *Proceedings of the International European Conference on Gravitation, Journées Relativistes 99*, volume **9** Spec. Iss. of *Annalen der Physik*. Wiley, 2000.

[S6] Steinbauer, R. Diffeomorphism invariant Colombeau algebras. Part I: Local theory. Contribution to Proceedings of the International Conference on Generalized Functions (ICGF 2000, Guadeloupe), erscheint in *Integral Transf. Special Funct.*, 2002.

[S7] Kunzinger, M. Diffeomorphism invariant Colombeau algebras. Part III: Global theory. Contribution to Proceedings of the International Conference on Generalized Functions (ICGF 2000, Guadeloupe), erscheint in *Integral Transf. Special Funct.*, 2002.

D Vorträge

[V16] Urbantke, H. (Posterpräsentation) A global theory of algebras of generalized functions. Journees Relativistes 1999. Universität Weinmar, Deutschland, September 1999.

[V17] Grosser, M., Steinbauer, R. Algebren verallgemeinerter Funktionen auf Mannigfaltigkeiten. Mathematisches Kolloquium, Universität Wien, Oktober 1999.

[V18] Steinbauer, R. Diffeomorphism invariant Colombeau algebras, Part 1: Local theory. International Conference on Generalized Functions (ICGF 2000). Universite' des Antilles et de la Guyane, Guadeloupe, Frankreich, April 2000.

[V19] Steinbauer, R. The geometry of nonlinear generalized functions. Institut für Techn. Mathematik, Geometrie u. Bauinformatik, Universität Innsbruck, Juni 2001.

[V20] Kunzinger, M. Nonlinear distributional geometry. Department of Mathematics, University of Southampton, UK, Juli 2001.

[V21] Steinbauer, R. Generalized semi-Riemannian Geometry. Department of Mathematics, University of Southampton, UK, August 2001.

[V22] Steinbauer, R. Nonlinear distributional geometry, Part 1. 15. ÖMG-Kongress. Universität Wien, September 2001.

[V23] Kunzinger, M. Nonlinear distributional geometry, Part 3. 15. ÖMG-Kongress. Universität Wien, September 2001.

[Bal93] Balasin, H., Nachbagauer, H. On the distributional nature of the energy-momentum tensor of a black hole or what curves the Schwarzschild geometry? *Class. Quant. Grav.*, **10**:2271–2278, 1993.

[Bal95] Balasin, H., Nachbagauer, H. The ultrarelativistic Kerr-geometry and its energy-momentum tensor. *Class. Quant. Grav.*, **12**:707–713, 1995.

[Bal97] Balasin, H. Geodesics for impulsive gravitational waves and the multiplication of distributions. *Class. Quant. Grav.*, **14**:455–462, 1997.

[Ber93] Berger, F., Colombeau, J. F., Moussaoui, M. Solutions mesures de dirac de systèmes de lois de conservation et applications numériques. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I*, **316**:989–994, 1993.

[Ber95] Berger, F., Colombeau, J. F. Numerical solutions of one-pressure models in multifluid flows. *SIAM J. Numer. Anal.*, **32**:1139–1154, 1995.

[Bia90] Biagioni, H. A. *A Nonlinear Theory of Generalized Functions*, volume **1421** of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 1990.

[Bia92a] Biagioni, H. A., Oberguggenberger, M. Generalized solutions to burgers' equation. *J. Diff. Eqs.*, **97**:263–287, 1992.

[Bia92b] Biagioni, H. A., Oberguggenberger, M. Generalized solutions to the Korteweg - de Vries and the regularized long-wave equations. *SIAM J. Math. Anal.*, **23**:923–940, 1992.

[Bla00] Blanchet, L., Faye, G. Hadamard regularization. *J. Math. Phys.*, **41**(11):7675–7714, 2000.

[Cho93] Choquet-Bruhat, Y. Applications of generalized functions to shocks and discrete models. In R. S. Pathak, editor, *Generalized Functions and Their Applications*, pages 37–49. Plenum Press, 1993.

[Col84] Colombeau, J. F. *New Generalized Functions and Multiplication of Distributions*. North Holland, Amsterdam, 1984.

[Col85] Colombeau, J. F. *Elementary Introduction to New Generalized Functions*. North Holland, Amsterdam, 1985.

[Col90a] Colombeau, J. F. Multiplication of distributions. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, **23**:251–268, 1990.

[Col90b] Colombeau, J. F., Oberguggenberger, M. On a hyperbolic system with a compatible quadratic term: Generalized solutions, delta waves, and multiplication of distributions. *Comm. Partial Differential Equations*, **15**:905–938, 1990.

[Col92] Colombeau, J. F. *Multiplication of Distributions. A tool in mathematics, numerical engineering and theoretical physics*, volume **1532** of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, 1992.

[Col93] Colombeau, J. F., Heibig, A., Oberguggenberger, M. Le problème de Cauchy dans un espace de fonctions gènèralisèes i. *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I*, **317**:851–855, 1993.

[Col94a] Colombeau, J. F., Heibig, A., Oberguggenberger, M. Le problème de Cauchy dans un espace de fonctions gènèralisèes ii. *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I*, **319**:1179–1183, 1994.

[Col94b] Colombeau, J. F., Meril, A. Generalized functions and multiplication of distributions on $\mathcal{C}^\infty$ manifolds. *J. Math. Anal. Appl.*, **186**:357–364, 1994.

[Dap96] Dapić, N., Pilipović, S. Microlocal analysis of Colombeau's generalized functions on a manifold. *Indag. Math. (N.S.)*, **7**:293–309, 1996.

[Dap02] Dapić, N., Kunzinger, M., Pilipović, S. Symmetry group analysis of weak solutions. *Proc. London Math. Soc.*, **84**(3):686–710, 2002.

[De 84] De Rham, G. *Differentiable Manifolds*, volume **266** of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften.* Springer, Berlin, 1984.

[De 89] De Vega, H. J., Sánchez, N. Particle scattering at the Planck scale an the Aichelburg-Sexl geometry. *Nucl. Phys.*, **B317**:731–756, 1989.

[De 91] De Roever, J. W., Damsma, M. Colombeau algebras on a $\mathcal{C}^\infty$-manifold. *Indag. Mathem., N.S.*, **2**(3), 1991.

[Fer90] Ferrari, V., Pendenza, P. Boosting the Kerr metric. *J. Gen. Rel. Grav.*, **22**(10):1105–1117, 1990.

[Ger87] Geroch, R., Traschen, J. Strings and other distributional sources in general relativity. *Phys. Rev. D*, **36**(4):1017–1031, 1987.

[Haw73] Hawking, S., W., Ellis, G., F., R. *The Large Scale Structure of Space-Time.* Cambridge University Press, 1973.

[Jel99] Jelínek, J. An intrinsic definition of the Colombeau generalized functions. *Comment. Math. Univ. Carolinae*, **40**:71–95, 1999.

[Kaw97] Kawai, T., Sakane, E. Distributional energy-momentum densities of Schwarzschild space-time. *Prog. Theor. Phys.*, **98**:69–86, 1997.

[Key95] Keyfitz, B. L., Kranzer. H. C. Spaces of weighted measures for conservation laws with singular shock solutions. *J. Differential Equations*, pages 420–451, 1995.

[Kri97] Kriegl, A., Michor, P. W. *The Convenient Setting of Global Analysis*, volume **53** of *Math. Surveys Monogr.* Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.

[Kun00] Kunzinger, M., Oberguggenberger, M. Group analysis of differential equations and generalized functions. *SIAM J. Math. Anal.*, **31**(6):1192–1213, 2000.

[Lic71] Lichnerowicz, A. Sur les ondes de choc gravitationnelles. *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A*, **273**:528–532, 1971.

[Mar68] Marsden, J. E. Generalized Hamiltonian mechanics. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **28**(4):323–361, 1968.

[Obe92] Oberguggenberger, M. *Multiplication of Distributions and Applications to Partial Differential Equations*, volume **259** of *Pitman Research Notes in Mathematics.* Longman, Harlow, U.K., 1992.

[Obe99] Oberguggenberger, M., Kunzinger, M. Characterization of Colombeau generalized functions by their pointvalues. *Math. Nachr.*, **203**:147–157, 1999.

[Par79] Parker, P. Distributional geometry. *J. Math. Phys.*, **20**(7):1423–1426, 1979.

[Pen72] Penrose, R. The geometry of impulsive gravitational waves. In L. O'Raifeartaigh, editor, *General Relativity, Papers in Honour of J. L. Synge*, pages 101–115. Clarendon Press, Oxford, 1972.

[Pod99] Podolský, J., Griffiths, J. B. Expanding impulsive gravitational waves. *Class. Quant. Grav.*, **16**:2937–2946, 1999.

[Ros78] Rosinger, E. E. *Distributions and Nonlinear Partial Differential Equations*, volume **684** of *Lecture Notes in Mathematics.* Springer, Berlin, 1978.

[Ros80] Rosinger, E. E. *Nonlinear Partial Differential Equations. Sequential and Weak Solutions.* North Holland, Amsterdam, 1980.

[Sch54] Schwartz, L. Sur l'impossibilité de la multiplication des distributions. *C. R. Acad. Sci. Paris*, **239**:847–848, 1954.

[Sch66] Schwartz, L. *Théorie des Distributions.* Hermann, Paris, 1966.

[Tau80] Taub, A., H. Space-times with distribution valued curvature tensors. *J. Math. Phys.*, **21**(6):1423–1431, 1980.

[Vic99] Vickers, J. A. Nonlinear generalized functions in general relativity. In Grosser, M., Hörmann, G., Kunzinger, M., Oberguggenberger, M., editor, *Nonlinear Theory of Generalized Functions*, volume **401** of *Chapman & Hall/CRC Research Notes in Mathematics*, pages 275–290, Boca Raton, 1999. CRC Press.