ENDBERICHT

Distributionelle Methoden in der allgemeinen Relativitätstheorie

R. Steinbauer

(Wien, April 1998)

I. ZUSAMMENFASSUNG

Wie ausführlich im Dissertationsexposé und im Zwischenbericht dargestellt, befasse ich mich im Rahmen meines Dissertationsprojekts (Betreuer: Prof. H. Urbantke (Inst. f. Theor. Physik/Univ. Wien); Zweitbegutachter: Prof. M. Grosser (Inst. f. Mathematik/Univ. Wien); siehe dazu auch meine homepage unter http://www./thp./univie.ac.at/˜ stein) mit Anwendungen distributioneller Methoden, vor allem aber der Theorie der Algebren verallgemeinerter Funktionen (Colombeau Algebren [10,11,25,29]) in der allgemeinen Relativitätstheorie. Zentrale Schwerpunkte meiner Arbeit in den letzten eineinhalb Jahren stellen die *distributionelle Beschreibung impulsiver Gravitationswellen,* sowie die generelle *Konzeption der Beschreibung singulärer Raumzeitgeometrien* im Rahmen der nichtlinearen Theorie der verallgemeinerten Funktionen dar.

Impulsive Gravitationswellen sind stark singuläre Raumzeitmannigfaltigkeiten, deren Metriktensor eine δ-Funktion enthält. Die Untersuchung dieser Geometrien mittels Geodäten- und geodätischer Deviationsgleichung wurde unter Adaptierung von Konzepten der Colombeau Theorie zur Lösung von Differentialgleichungen mit singulären Daten durchgeführt. Eine detaillierte Darstellung findet sich in Abschnitt II. Zu diesem Thema konnte ich einen Artikel [32] im Journal of Mathematical Physics (April 1998), sowie einen Proceedingsbeitrag [33] veröffentlichen und auf zwei internationalen Konferenzen Vorträge halten. Eine weitere Publikation gemeinsam mit Dr. M. Kunzinger (Inst. f. Mathematik/Univ. Wien) [23] steht knapp vor der Fertigstellung.

Der zweite Schwerpunkt wurde vor allem durch die Publikationen [7–9,34,35] und Kontakte

(mit) der Arbeitsgruppe um Prof. C. Clarke und Dr. J. Vickers von der Relativity Group der Faculty of Mathematical Studies an der University of Southampton/UK inspiriert (vgl. dazu auch die Darstellung im Zwischenbericht). Es sollen die Methoden der Theorie der verallgemeinerten Funktionen benützt werden, um Raumzeiten von niederer Differenzierbarkeit eine distributionelle Krümmung zuzuordenen. Eine ausführliche Darstellung findet sich in Abschnitt III. Die in diesem Zusammenhang aufgeworfenen mathematischen Fragestellungen bilden auch einen Hauptteil des Buchprojekts ,,Geometric Theory of Generalized Functions" (eingereicht bei und prinzipiell akzeptiert von Kluwer Academic Press), das gemeinsam mit Prof. M. Grosser, Dr. M. Kunzinger (Inst. f. Mathematik/Univ. Wien) und Prof. M. Oberguggenberger (Inst. f. Mathematik/Univ. Innsbruck) begonnen wurde.
Schließlich habe ich mich noch mit einigen weiteren Fragestellungen und Problemkreisen auseinandergesetzt, auf die im Abschnitt IV näher eingegangen wird.

Insgesamt konnte ich während meiner Stipendiatszeit drei wissenschaftliche Publikationen [20,31,32] veröffentlichen sowie zwei weitere [23,33] vorbereiten (je eine als Koautor). Darüberhinaus arbeite ich gemeinsam mit M. Grosser, M. Kunzinger und M. Oberguggenberger an der Veröffentlichung eines Buchs. Ich habe fünf Konferenzen/Sommerschulen besucht, dabei drei Vorträge gehalten und bin für Sommer 1998 bereits zu zwei weiteren Konferenzen als Vortragender eingeladen. Während dreier Forschungsaufenthalte am Inst. f. Mathematik der Univ. Innsbruck konnte die Zusammenarbeit mit M. Oberguggenberger intensiviert werden.
Meine Disseration wird neben dem hier dargestellten Material, auch einführende Kapitel über Distributionen auf Mannigfaltigkeiten und die verschiedenen Aspekte, Colombeau Algebren auf Mannigfaltigkeiten zu definieren, enthalten und im Laufe des nächsten Wintersemesters fertiggestellt werden.
Entscheidendes Moment für meine Tätigkeit in all den hier aufgezählten Arbeitsgebieten ist die Zusammenarbeit im Rahmen der Forschungsgruppe DIANA (Differential Algebras and Nonlinear Analysis, siehe auch http://solon.cma.univie.ac.at/˜gue/diana.html) am Institut für Mathematik der Universität Wien.

II. GEODÄTEN UND GEODÄTISCHE DEVIATION IN IMPULSIVEN GRAVITATIONSWELLEN

A. Ausgangslage

Impulsive ebenfrontige Gravitationswellen mit parallelen Strahlen (impulsive pp-Wellen) können durch eine Metrik der Gestalt [27]

$$ds^2 \;=\; \delta(u)\, f(x,y)\, du^2 - du\, dv + dx^2 + dy^2 \tag{1}$$

beschrieben werden. Dabei sind (u, v) Null-, (x, y) transversale kartesische Koordinaten und f die durch die Feldgleichungen ρ (ρ die Eneergiedichte) gegebene bestimmte Profilfunktion. Die Raumzeit ist überall flach außer auf der Hyperfläche $u = 0$, wo die Krümmung δ-förmig konzentriert ist und modelliert so eine Gravitationsschockwelle. Am natürlichsten tritt diese Klasse von Metriken als ultrarelativistischer Limes Schwarzer Löcher auf, wie zuerst von Aichelburg und Sexl im Fall von Schwarzschild gezeigt wurde [1,4,24].

Versucht man nun Teilchenbewegungen in diesen Geometrien zu studieren, so stellt sich bald heraus, daß sowohl die Geodätengleichung wie auch die Deviationsgleichung Produkte von Distributionen ($\theta\delta$, die Deviationsgleichung sogar $\theta^2\delta$ und δ^2) enthalten, die im (klassischen=linearen) distributionellen Rahmen nicht gehandhabt werden können. Für eine detailliertere Darstellung siehe Zwischenbericht pp. 3-4.

Wie ebenfalls im Zwischenbericht (pp. 4-5) dargelegt und in [32] durchgeführt, können die oben geschilderten Probleme durch eine sorgsame Regularisierungsprozedur umgangen werden. Diese mathematisch saubere Vorgehensweise folgt der physikalisch motivierten Idee, die impulsive Welle als Grenzfall von ,,Sandwichwellen" mit immer schmälerem Wellenprofil und steigender Amplitude anzusehen; dabei wird die δ-Distribution durch ein ,,model delta net" ρ_ϵ approximiert (genauer sei: $\rho \in \mathcal{D}([-1,1])$ mit $\int \rho = 1$; setze $\rho_\epsilon(x) = (1/\epsilon)\,\rho(x/\epsilon)$, $(\epsilon > 0)$). Die so entstandenen regularisierten Gleichungen werden dann (für fixes ϵ) im Rahmen der glatten Funktionen gelöst. Schließlich liefert der regularisierungsunabhängige(!) Limes $\epsilon \to 0$ distributionelle Grenzwerte als ,,Lösungen" zum ursprünglichen Problem, welche perfekt in das heuristisch erwartete Bild passen; die Geodäten sind durch gebrochene (geknickte) gerade Linien gegeben.

Vom mathematischen Standpunkt ist es aber unbefriedigend, daß die durch den Regularisierungsprozeß erhaltenen (disributionellen) ,,Lösungen" nicht die ursprünglichen (distributionellen) Gleichungen erfüllen; die ,,naive" Regularisierungsprozedur liefert kein geeignetes Lösungskonzept. Einen solchen stellt aber die nichtlineare Theorie der verallgemeinerten Funktionen Colombeaus [10,11,25,29] zur Verfügung. Kürzlich haben Hermann und Oberguggenberger [19], (siehe auch [22]) singuläre nichtlineare ODEs in der Colombeau Algebra studiert. Da sie aber hauptsächlich an globalen Fragestellungen interessiert waren, stellten sie starke Bedingungen an die rechten Seiten der Gleichungen; zu stark im Zusammenhang mit den hier zu bearbeitenden Problemen. Daher mußten ihre Konzepte an die vorliegende Situation angepaßt werden.

Weiters war es wünschenswert, die Resultate in [32] in folgender Hinsicht zu verallgemeinern. Erstens sollte die δ-Singularität nicht durch ein ,,model δ-net", sondern durch die größte ,,vernünftige" Klasse glatter Regularisierungen approximiert werden, um auch physikalisch motivierte Grenzprozesse, wie z.B. die ursprünglich von Aichelburg und Sexl [1] verwendete Folge geboosteter Schwarzschildmetriken, einfangen zu können. Zweitens war es wünschenswert nicht nur glatte, sondern möglichst singuläre Profilfunktionen f in der Metrik (1) zuzulassen, wieder um möglichst alle physikalisch relevanten Fälle beschreiben zu können.

B. Methodisches Vorgehen und Ergebnisse

Zunächst ist es zum Verständnis des Folgenden notwendig, die Grundbegriffe der Colombeau Algebra darzustellen; dabei werde ich die einfachste, die sogenannte ,,spezielle Variante" der Algebra verwenden, wenn auch die Rechnungen in [23] in der ,,kanonischeren", sogenannten ,,vollen Algebra" durchgeführt wurden. (Detaillierte Darstellungen der Theorie der Algebren verallgemeinerten Funktionen finden sich etwa in [10,25,29], eine besonders gut lesbare Einführung ist in [22] enthalten.)

Eine Colombeau Funktion (oder auch Colombeau Vektor) U ist eine Folge (ein Netz) glatter Funktionen $U = (u_\epsilon)_\epsilon$, die mit einem Parameter $\epsilon \in (0, 1)$ indiziert ist und bezüglich ϵ bestimmte Wachstumsbedingungen erfüllt (auf Kompakta in allen Ableitungen schwach wachsend). Weiters ist eine Colombeau Funktion nur bis auf ein Nullelement N, d.h. ein in ϵ in allen Ableitungen auf Kompakte stark fallendes $(n_\epsilon)_\epsilon$ bestimmt. Mit komponentenweisen Operationen ist der Raum $\mathcal{G}$ aller dieser Netze $U = (u_\epsilon)_\epsilon$ eine Differentialalgebra. Glatte Funktionen f werden als konstante Vektoren $f = (f)_\epsilon$, C^k-, stetige Funktionen und Distributionen werden durch Faltung mit einem Mollifier ρ_ϵ (Glättung) in die Algebra eingebettet ($\rho \in \mathcal{S}$, $\int \rho = 1$, $\int x^m \rho(x)\, d^n x = 0 \quad \forall m \geq 2$ und wie üblich $\rho_\epsilon(x) = \epsilon^{-n} \rho(\epsilon^{-n} x)$). Die geforderten Wachstumsbedingungen garantieren nun, daß die glatten Funktionen eine Unteralgebra bilden und die Ableitung in $\mathcal{G}$ die klassische Operation auf Distributionen fortsetzt. Im Lichte des Schwartzschen ,,Unmöglichkeitsresultats" [30] ist diese Konstruktion optimal bezüglich der Konsistenz mit klassischen Operationen. Die hier explitzite Abhängigkeit von der Wahl des Mollifiers ρ kann in der ,,vollen Algebra" vermieden werden; alle Resultate der ,,speziellen Variante" behalten sinngemäß ihre Gültigkeit und können so leichter erklärt werden.

Um nun etwa die Geodätengleichung für impulsive pp-Wellen (vgl. [23,32] oder Zwischenbericht p. 4)

$$\begin{aligned} \ddot{v}(u) &= f(x^i(u))\, \dot{\delta}(u) + 2[\partial_i f(x^i(u)) \dot{x}^i(u)]\, \delta(u) \\ \ddot{x}^i\,(u) &= \frac{1}{2}\, \partial_i\, f(x^i(u))\; \delta(u)\ , \end{aligned} \tag{2}$$

in $\mathcal{G}$ behandeln zu können muß zunächst die $\delta-$Singularität in die Algebra eingebettet werden. Da wir an möglichst allgemeinen Resultaten interessiert sind, beschränken wir uns aber nicht auf die Faltungseinbettung (was im Wesentlichen der Verwendung eines ,,model δ-nets" bedeuten würde), sondern definieren die größte ,,vernünftige" Klasse glatter Regularisierungen von δ (vgl. [19]). Genauer heißt eine Colombeau Funktion D *verallgemeinerte δ-Funktion* falls

$$\begin{aligned} &\text{(a)} \quad \operatorname{supp}(\rho_\epsilon) \to \{0\} \quad (\epsilon \to 0)\ , \\ &\text{(b)} \quad \int \rho_\epsilon(x)\, dx \to 1 \quad (\epsilon \to 0) \ \ \text{und} \\ &\text{(c)} \quad \|\rho\|_1 \leq C \quad \forall \epsilon\, . \end{aligned}$$

Ersetz man nun in Gleichung (2) die δ-Distribution duch eine verallgemeinerte δ-Funktion, so sind alle Operationen in $\mathcal{G}$ wohldefiniert und wir können nun Lösungen der Gleichungen in der Colombeau Algebra suchen. Dies geschieht mittels komponentenweiser Konstruktion; für jedes fixe ϵ haben wir es mit glatten Gleichungen zu tun. Ein technisches Lemma im Anhang von [32] garantiert (für kleine ϵ) die globale Existenz der Lösungen. Weiteres liefert eine Verfeinerung dieses Lemmas (vgl. [23]) die notwendigen Beschränktheitsaussagen um zu zeigen, daß die Folge der Lösungen wirklich eine $\mathcal{G}$-Funktionen bilden (ϵ Wachstumsbeschränkungen!). Weiters kann auch Eindeutigkeit dieser Lösungen in der Algebra gezeigt werden. Bezeichnen wir die zu v und x^i korrespondierenden verallgemeinerten Funktionen mit Großbuchstaben, so haben wir folgendes

Theorem. Sei D eine verallgemeinerte δ-Funktion, sei f glatt und seien v_0, $\dot{v}_0 \in \mathbb{R}$, x^i_0, $\dot{x}^i_0 \in \mathbb{R}^2$. Dann hat das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned}
\ddot{V}(u) &= f(X^i(u))\,\dot{D}(u) + 2\,\partial_i f(X^i(u))\,\dot{X}^i\,(u)\,D(u)\\
\ddot{X}^i(u) &= \frac{1}{2}\,\partial_i f(X^i(u))\,D(u)\\
V(-1) = v_0 \quad X^i(-1) &= x^i_0\\
\dot{V}(-1) = \dot{v}_0 \quad \dot{X}^i(-1) &= \dot{x}^i_0
\end{aligned} \tag{3}$$

eine eindeutige Lösung $(V, X^1, X^2) \in \mathcal{G}(\mathbb{R})^3$.

Für die geodätische Deviationsgleichung erhält man einen analogen Satz, der hier wegen der größeren Komplexität der Formeln nicht wiedergegeben werden soll. Weiters können die Bedingungen an die Profilfunktion f noch etwas gelockert werden. Ist f nicht glatt, so muß auf den rechten Seiten der Gleichungen die verallgemeinerte Funktion X in die verallgemeinerte Funktion F eingesetzt werden. Damit diese Komposition wieder in $\mathcal{G}$ liegt müßen an F gewisse Wachstumsbedingungen gestellt werden, i.e. die Ableitungen ∇F und $\nabla\nabla F$ müssen λ-beschränkt [2] sein; eine genaue Diskussion ist sehr technisch, und soll hier vermieden werden.

Die Berechnung schwacher Limiten der eindeutigen Colombeau Lösungen kann im Rahmen des *Assoziationsbegriffes* in der Algebra studiert werden. Zwei veralgemeinerte Funktionen heißen dabei assoziiert zueinander $U \approx V$, falls $u_\epsilon - v_\epsilon \to 0$ als Distribution für $\epsilon \to 0$. Ist dabei V selbst eine Distribution, so heißt U *distributioneller Schatten* von V; U ist dann vom linearen Standpunkt aus gesehen mit V „gleichwertig" und wird auch als *makroskopischer*

Aspekt von V bezeichnet. Die Gleichheit in $\mathcal{D}'$ schlägt sich also in $\mathcal{G}$ als Assoziation nieder; Gleichheit in der Algebra ist aber strenger.

Mittels längerer Rechnung und Abschätzungen läßt sich folgendes Resultat beweisen [23].

Theorem. Die eindeutige Lösung der Geodätengleichung (V, X^i) erfüllen die folgenden Assoziationsrelationen:

$$\begin{aligned} X^i &\approx x_0^i + \dot{x}_0^i(1+u) + \frac{1}{2}\partial_i f(x_0^i + \dot{x}_0^i)u_+ \\ V &\approx v_0 + \dot{v}_0(1+u) + f(x_0^i + \dot{x}_0^i)\theta(u) + f(x_0^i + \dot{x}_0^i)\left(\dot{x}_0^i + \frac{1}{4}f(x_0^i + \dot{x}_0^i)\right)u_+ \end{aligned} \tag{4}$$

Ein analoges Resultat gilt wiederum für die Deviationsgleichung. Außerdem können einige Konvergenzen noch verschärft werden [23].

Weiters kann durch Verwendung einer (von Colombeau und Meril [12] eingeführten) modifizierten Variante der Colombeau Algebra explizit nachgewiesen werden, daß alle Resultate geometrisch sind; d.h. sie hängen nicht von dem gewählten Koordinatensystem ab.

C. Diskussion

Wie im Zwischenbericht angekündigt, konnten die Methoden der Theorie der Verallgemeinerten Funktionen und hier insbesondere der Lösungsbegriff für singuläre Differentialgleichungen auf die Problemstellung der Geodätengleichung und geodätischen Deviationsgleichung für impulsive pp-Wellen angewandt werden. Dabei wurden Existenz und Eindeutigkeitssätze unter sehr allgemeinen Voraussetzungen sowohl an die Regularisierung der δ-Distribution, wie auch die Gestalt der Profilfunktion bewiesen. Weiters konnten im Rahmen des Assoziationskonzepts distributionelle Limiten berechnet werden, die die physikalischen Erwartungen perfekt erfüllen; die Geodäten sind durch gebrochen gerade Linien gegeben und auch das Deviationsfeld paßt ins erwartete Bild (für eine genauere Diskussion siehe [32]). Die Ergebnisse (4) verallgemeinern die teilweise schon früher erzielten Resultate [5,14,32] und wurden durch eine mathematisch rigorose Vorgehensweise erzielt. Wir können also behaupten, daß die Geometrie impulsiver pp-Wellen in unserem Rahmen konsistent beschrieben werden kann.

Wichtig war es dabei, die Methoden der Colombeau Algebra zu verwenden, die im Wesentlichen darauf beruhen, die Singularitäten in sehr allgemeiner Weise zu regularisieren und mittels einer genauen ,,Buchhaltung über die Regularisierungen" zu regularisierungsunabhängigen, exakten mathematischen Aussagen zu gelangen. So war es möglich, mit nichtlinearen stark singulären Termen ($\theta\delta$, $\theta^2\delta$, δ^2) in rigoroser und sinnvoller Weise umzugehen und verläßliche Ergebnisse zu erzielen. Im Gegensatz dazu können von ,,ad-hoc" Erweiterungen der linearen Schwartzschen Distributionentheorie durch gewiße Multiplikationsvorschriften im allgemeinen keine verlässlichen Resultate erwartet werden. Für eine Diskussion ,,verbreiteter" Fehler sogar in der mathematischen Literatur siehe Hájek [17].

III. DISTRIBUTIONELLE KRÜMMUNG

Wie im Zwischenbericht dargestellt entstand, beeinflußt vor allem durch die aktuelle Publikationen [8,34] der Arbeitsgruppe um C. Clarke und J. Vickers von der University Southamton/UK ein zweiter Schwerpunkt meiner Arbeit. Dabei soll Raumzeiten von niederer Differenzierbarkeit, insbesondere Metriken, die nicht die Geroch-Traschen Bedingungen [16] erfüllen (diese sind hinreichend um eine Behandlung im klassischen distributionellen Rahmen zu ermöglichen, schließen aber eine weite Klasse physikalisch interessanter Fälle, wie z.B. Strings oder Punktteilchen aus; vgl. auch die ausführliche Diskussion im Disseratationsexposé pp. 4ff) unter Verwendung der Colomebau Algebren eine wohldefinierte Krümmung zugeordnet und diese mittels Assoziation distributionell zu interpretiert werden. In den Publikationen der englischen Arbeitsgruppe wurde dieses Programm für verschiedene konische Metriken, die kosmische Strings beschreiben, durchgeführt (vgl. auch die Diskussion im Zwischenbericht, p. 8-9).

Diese Rechnungen, obwohl im Einzelfall sehr erfolgreich, lassen noch ein einheitliches Fundament vermissen. Die Theorie der der verallgemeinerten Funktionen auf Mannigfaltigkeiten, die ein solches liefern würde, ist noch nicht weit genug gediehen, um essentielle Fragen, wie etwa Diffeomorphismeninvarianz in ausreichender Klarheit und Allgemeinheit zu diskutieren. Es gilt hier vorallem, die in der Literatur verstreuten Ansätze [12,13,28] zu einem einheitlichen und einem für diese Anwendungen genügend robusten Rahmen zusammenzufügen.

Dieses Unterfangen, das auch eine einheitliche Sichtweise für die im Abschnitt II dargestellten Rechnungen bereithält, stellt den letzten noch ausständigen Teil meiner Dissertation dar. In Zusammenarbeit mit M. Oberguggenberger, M. Grosser und M. Kunzinger bin ich als Koautor an einem (bei Kluwer Academic Press eingereichten und prinzipiell akzeptieren) Buchprojekt mit Titel ,,Geometric Theory of Generalized Functions" beteiligt, das sich auch wesentlich mit oben erwähnter Problematik beschäftigt. Insbesondere sollen die verschiedenen Aspekte, einer ,,singulären" Metrik eine distributionelle Krümmung zuzuordnen diskutiert werden.

Während des ESI Workshop ,,Nonlinear Theory of Generalized Functions," der von Oktober bis Dezember in Wien stattfand (siehe auch V), konnte ich wichtige Kontakte zu J. Vickers und auf der GR15-Konferenz in Pune/Indien Ende Dezember (siehe ebenfalls V) zu C. Clarke und J. Wilson knüpfen. Darüberhinaus werden J. Vickers und J. Wilson auf Einladung des ESI am 5. Mai zu einem zweiwöchigen Forschungsaufenthalt in Wien eintreffen, wovon ich mir wesentliche Impulse bis hin zu konkreter Zusammenarbeit erwarte.

Ein besonders interessanter Punkt ist hierbei die Beschreibung von Raumzeitsingularitäten in der ART (C. Clarke ist einer der führenden Experten auf diesem Gebiet [6]). Während traditionellerweise Singularitäten in der ART durch geodätische Unvollständigkeit definiert werden (ein Konzept, das Hawking und Penrose in den 70er Jahren zu ihren berühmten Singularitätentheoremen [18] fühte), versuchen modernere Zugänge Singularitäten als Punkte zu deuten, an denen die Zeitentwicklung der Geometrie (der ,,dynamische Anteil" der Einsteingleichungen) zusammenbricht [7]. Dies erlaubt es die Zusammenhänge mit der (starken) kosmischen Zensur-Hypothese klarer zu fassen, die grobgenommen besagt, daß Singularitäten ,,vor Beobachtern verborgen bleiben." Um nun ,,schwach" singuläre Raumzeiten wie z.B. die sogenannten shell-crossing-singularities als Gegenbeispiele zur kosmischen Zensur-Hypothese auszuschließen, bedient man sich schwacher (d.h. distributioneller) Lösungskonzepte für die Einsteingleichungen [9]. Es soll nun unter anderem untersucht werden, inwieweit die Lösungskonzepte in der Colombeau Algebra hier Fortschritte bringen können.

IV. WEITERE AKTIVITÄTEN

A. Distributionelle Krümmung der Schwarzschildmetrik

Angeregt durch kürzlich erschienen Artikel [3,21,26], und im Zusammenhang mit der im vorigen Abschnitt beschriebenen Problematik, begannen gemeinsam mit M. Heinzle (Inst. f. Theor. Physik/Univ. Wien) Untersuchungen mit dem Ziel, unter Verwendung der Theorie der verallgemeinerten Funktionen der Schwarzschildmetrik eine distributionelle Krümmung zuzuordenen. Diese wohl bekannteste Metrik der ART hat in Schwarzschildkoordinaten die Gestalt

$$ds^2 \;=\; -(1-\frac{2M}{r})\,dt^2 + (1-\frac{2M}{r})^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{5}$$

und ist die eindeutige radialsymmetrische Lösung der Einstein Gleichungen in Vakuum. Unsere Aufmerksamkeit gilt im besonderen der Schwarzloch-Singularität bei $r = 0$, wo der Riccitensor divergiert. Es soll versucht werden, auf mathematisch einwandfreie Weise, der Raumzeit einen, auf die zeitartige 2-Fläche $r = 0$ konzentrierten Riccitensor, und somit über die Feldgleichungen einen distributionellen Energie Impuls Tensor zuzuordnen. Die bisher vorliegenden Arbeiten verwenden spezielle Regularisierungen, um den auftretenden nichtdefinierten Produkten der als Distribution zu interpretierenden lokalintegrierbaren Funktion $1/r$ und ihrere Ableitungen zu begegnen. Die Ergebnisse sind daher regularisierungs*abhängig* und beinhalten (bisher undiskutierte) Beliebigkeiten.

Mit den Methoden der Theorie der verallgemeinerten Funktionen soll nun versucht werden, die Situation regularisierungsunabhängig zu beschreiben. Während die wesentlichen konzeptionellen Fragen geklärt sind, besteht die größte Schwierigkeit in der Länge und der Unübersichtlichkeit der zu manipulierenden Ausdrücke und dem daraus resultiereden großen Rechenaufwand.

Diese Arbeit ist als erster Teil des FWF-Projekts P12023MAT (Projektleiter: H. Urbantke/Inst. f. Theor. Physik) zu sehen, bei dem ich ab 1.Mai d. J. als Forschungsmitarbeiter tätig sein werde. M. Heinzle erhält zur Zeit eine Forschungsbeihilfe aus den Projektmitteln.

B. Gravitationswellen kosmologischen Ursprungs

Die Thematik dieses Projekts, theoretische und praktische Perspektiven der Beobachtung von Gravitationsstrahlung, steht in weniger konkretem Zusammenhang mit meinem Dissertationsgebiet, ist aber wegen seiner außerordentlichen Aktualität (der direkte Nachweis von Gravitationswellen wird für die nächsten Jahre erwartet) von großer Bedeutung für die Gravitationsphysik und jeden aktiven Forscher. Das Projekt wurde anläßlich der ESA Sommerschule in Alpbach 1997 (siehe auch V) in Zusammenarbeit mit Dr. S. Husa, B. Pocza, Dr. F. Schein (Inst. f. Theor. Physik/Univ. Wien) und Dr. A. Nairz (Inst. f. Theor. Physik/Univ. Innsbruck) begonnen.
Während die ersten Beobachtungen von Gravitationsstrahlung von erdgestützten Fabry-Perrot Interferometern (LIGO, VIRGO, GEO600,...) erwartet werden, kommt den geplanten weltraumgestützten (Michelson) Interferometern (LISA, OMEGA) durch die Möglichkeit periodische Quellen über lange Zeiträume (Jahre) hinweg beobachten zu können, besondere Bedeutung zu [15]. Sie operieren im (für erdgestützte Detektoren unerreichbaren) Frequenzbereich von $1 - 10^{-5}$ Hz, wo Signale von galaktischen Binärsystemen und supermassiven schwarzen Löchern, sowie stochastische Hintergrundstrahlung kosmologischen Ursprungs erwartet werden.
In diesem Projekt, das in Kontakt mit Mitgliedern des LISA-Teams begonnen wurde, werden theoretische Perspektiven von Interferometern mit einer optimalen Sensitivität zwischen 10^{-3} Hz und 10^{-5} Hz untersucht. Messungen in diesem Frequenzbereich sind insbesondere relevant, um die Existenz und das Spektrum eines stochastischen Hintergrundes kosmologischen Ursprungs zu klären. Es wurde das prinzipielle Design eines LISA-ähnliches Interferometers mit einer Armlänge von ca. 1 AU diskutiert, insbesondere die Positionierung im Sonnensystem, prinzipielle technologische Probleme, die Sensitivität und relevante Quellen. Kürzlich wurden gemeinsam mit Dr. F. Schein detaillierte Berechnungen zur Winkelauflösung begonnen.

Aus diesem Projekt stammt die Publikation [20] sowie die beiden gemeinsamen Vorträge mit Dr. S. Husa. (siehe V).

C. Mitarbeit in der Lehre

An Mitarbeit in der universitären Lehre habe ich im Wintersemester 1997/98 im Rahmen eines Tutoriums Übungen zur Vorlesung ,,Theoretische Physik VI (Klassiche Feldtheorie)" von Prof. P. Aichelburg am Inst. f. Theor. Physik der Univ. Wien betreut. In laufenden Sommersemester 1998 bin ich als Tutor in EDV Bereich (,,Einführung in die Benutzung des EDV Labors") am Inst. f. Mathematik der Univ. Wien tätig.

Darüberhinaus habe ich im Studienjahr 1996/97 an der Volkshochschule Ottakring einen Studienberechtigungskurs für Mathematik geleitet.

V. KONFERENZEN, FORSCHUNGSAUFENTHALTE, SOMMERSCHULEN UND VORTRÄGE

Während meiner Stipendiatszeit habe ich an folgenden Konferenzen und Sommerschulen teilgenommen, sowie folgende Forschungsaufenthalte absolviert.

- 13.1.-17.1.97: Forschungsaufenthalt bei M. Oberguggenberger am Inst. f. Mathematik/Univ. Innsbuck.
- 01.6.-06.6.97: II Workshop on low-dimensional Topology and Quantum Gravity, Stefan Banach Institut, Warschau, Polen. Für eine detailliertere Darstellung siehe Zwischenbericht pp. 10-11.
- 16.6.-18.6.97: Forschungsaufenthalt bei M. Oberguggenberger am Inst. f. Mathematik/Univ. Innsbuck.
- 21.7.-31.7.97: ESA Summer School 1997: Fundamental Physics in Space, Alpbach, Österreich. Aktive Teilnahme an einer Studie zu einer Weltraummission.
  Vortrag gem. mit S. Husa ,,Elfi: A gravitational wave detector for cosmology".
  Für weitere Datails siehe Zwischenbericht p. 11.
- 14.8.-18.8.97: 179. WE-Heraeus Semiar, Black Holes: Theory and Observation, Bad Honnef, Deutschland.

Für Details siehe ebenfalls Zwichenbericht p. 11.

- Okt.-Dez. 1997: ESI Workshop, Nonlinear Theory of Generalized Functions, Erwin Schrödinger Institut, Wien. Vortrag: ,,Geodesics for impulsive gravitational waves."
  Dieser von M. Oberguggenberger organisierte Workshop war für mich von sehr großer Bedeutung. Ich konnte nicht nur die Architekten der Theorie der verallgemeinerten Funktionen wie E. E. Rosinger, Y. Egorov, H. Biagioni, I. Gramchev und S. Pilipović persönlich kennenlerenen, sondern auch konkret auf Zusammenarbeit gerichtete Kontakte mit J. Vickers knüpfen. Außerdem hatte ich erstmals Gelegneheit meine Arbeit einem internationalem Publikum vorzustellen.

- 15.12.-21.12 97: GR15 (15th International Conference on General Relativity and Gravitation), IUCAA, Pune, Indien. Vortrag: ,,Geodesics and geodesic deviation for impulsive gravitational waves."
  Diese größte Konferenz für Gravitationsphysik war ein beeindruckendes Erlebnis. Ich konnte viele ausgezeichnete Plenarvorträge, sowie Spezialvorträge zu den Themen Mathematische Realtivitätstheorie, Numerische RT, Gravitationswellenphysik und Quantengravitation besuchen. Neben vielen bekannten Spitzenforschern konnte ich auch Physiker, die auf meinem Arbeitsgebiet forschen wie C. Clarke und J. Wilson treffen und an vielen interessanten Diskussionen teilnehmen.

- 15.2.-20.2.98: Forschungsaufenthalt bei M. Oberguggenberger am Inst. f. Mathematik/Univ. Innsbuck.

Weiters habe ich am Inst. f. Theor. Physik der Universität Wien im Rahmen des Privatissimums und des Literaturseminars der Gravitationsgruppe folgenden Vorträge gehalten.

- 11. und 18.1.97: Refined Algebraic Quantisation (siehe Zwischenbericht p. 10)

- 17. und 24.4.97: Distributionelle Krümmung von Strings (siehe Zwischenbericht p. 12)

- 16.1.98: gem. mit S. Husa: GR15 Konferenzbericht mit Überraschung

- 30.1.98: gem. mit S. Husa: Ein Gravitationswellendetektor für kosmologische Quellen

Literatur

[1] P. C. Aichelburg, R. U. Sexl, “On the gravitational field of a massless particle,” J. Gen. Rel. Grav. **2**, 303-312 (1971).

[2] J. Aragona, H. A. Biagioni, “Intrinsic definition of the Colombeau algebra of generalized functions,” Analysis Mathematica, **17**, 74-132, (1991).

[3] H. Balasin, H. Nachbagauer, “The energy-momentum tensor of a black hole, or what curves the Schwarzschild geometry,” Class. Quant. Grav. **10**, 2271-2278 (1993).

[4] H. Balasin, H. Nachbagauer, “The ultrarelativistic Kerr-geometry and its energy-momentum tensor,” Class. Quant. Grav. **12**, 707-713 (1995).

[5] H. Balasin, “Geodesics for impulsive gravitational waves and the multiplication of distributions,” Class. Quant. Grav. **14**, 455-462 (1997).

[6] C.J.S. Clarke, ”The Analysis of Spacetime Singularities,” (Cambridge Lecture Notes in Physics, Cambridge, 1993).

[7] C.J.S. Clarke, ”Singularities: boundaries or internal points,” in *Singularities, Balck Holes and Cosmic Censorship* edited by P. S. Joshi, 24-32 (IUCAA, Bombay, 1996).

[8] C. J. S. Clarke, J. A. Vickers, and J. P. Wilson, “Generalized functions and distributional curvature of strings,” Class. Quant. Grav. **13**, 2485-2498 (1996).

[9] C.J.S. Clarke, ”Generalized hyperbolicity in singular spacetimes,” preprint gr-qc/9702033 (1997).

[10] J. F. Colombeau, “New Generalized Functions and Multiplication of Distributions,” (North Holland, Amsterdam, 1984).

[11] J. F. Colombeau, “Multiplication of Distributions,” (Springer, Berlin, 1992).

[12] J. F. Colombeau, A.Meril, “Generalized Functions and Multiplication of Distributions on $\mathcal{C}^\infty$ Manifolds,” J. Math. Analysis Appl. **186**, 357-364 (1994).

[13] N. Dapić, S. Pilipović, “Microlocal analysis of Colombeau's generalized functions on a

manifold," Indag. Mathem., N.S., **7** (3), 293-309 (1996).

[14] V. Ferrari, P. Pendenza, G. Veneziano, "Beam like gravitational waves and their geodesics," J. Gen. Rel. Grav. **20**, 1185-1191 (1988).

[15] E. E. Flanagan, "Sources of gravitational radiation and prospects for their detection," preprint gr-qc/9804014, to appear in the Proceedings of the GR15-Conference (1998).

[16] R. Geroch, J. Traschen, "Strings and other distributional sources in general relativity," Phys. Rev. D **36** (4), 1017-1031 (1987).

[17] O. Hájek, Bull. Am. Math. Soc. **12** (2), 272-279 (1985).

[18] S. W. Hawking, G.F.R. Ellis, "The Large Scale Structure of Spacetime," (Cambridge University Press, Cambridge, 1973).

[19] R. Hermann, M. Oberguggenberger, "Generalized functions, calculus of variations and nonlinear ODEs," preprint (1995).

[20] S. Husa, A. Nairz, B. Pocza, R. Steinbauer, ,,ELFI, A gravitational wave detector for cosmology," in Fundamental Physics in Space, Proceedings of the Alpbach Summer School 1997 edited by A. Wilson, 45-47 (ESA Publications Division, Noordwijk, 1997).

[21] T. Kawai, E. Sakane, "Distributional energy-momentum densities of Schwarzschild space-time," Prog. Theor. Phys. **98**, 69-86 (1997).

[22] M. Kunzinger, "Lie Transformation Groups in Colombeau Algebras," Ph.D. thesis, University of Vienna (1996).

[23] M. Kunzinger, R. Steinbauer, ,,A rigorous solution concept for geodesic equations in impulsive gravitational waves," preprint, (1998).

[24] C. O. Loustó, N. Sánchez, "The ultrarelativistic limit of the Kerr-Newman geometry and particle scattering at the Planck scale," Phys. Lett. B **232**, 462-466 (1989).

[25] M. Oberguggenberger, "Multiplication of Distributions and Applications to Partial Differential Equations," (Longman Scientific and Technical, New York, 1992).

[26] N. R. Pantoja, H. Rago, “Energy-momentum tensor valued distributions for the Schwarzschild and Reissner-Nordstrøm geometries,” preprint gr-qc/9710072 (1997).

[27] R. Penrose, “The geometry of impulsive gravitational waves,” in *General Relativity, Papers in Honour of J. L. Synge,* edited by L. O’Raifeartaigh, 101-115 (Clarendon Press, Oxford, 1972).

[28] J.W. de Roever, M. Damsma, “Colombeau Algebras on a C^∞-manifold,” Indag. Mathem., N.S., **2** (3), 341-358 (1991).

[29] E. E. Rosinger, “Generalized Solutions of Nonlinear Partial Differential Equations,” (North Holland, Amsterdam, 1987).

[30] L. Schwartz, “Sur l’impossibilité de la multiplication des distributions,” C. R. Acad. Sci. Paris, **239**, 847-848 (1954).

[31] R. Steinbauer, “The ultrareltivistic Reissner-Nordstrøm field in the Colombeau algebra,” J. Math. Phys. **38** (3), 1614-1622 (1997).

[32] R. Steinbauer, “Geodesics and Geodesic Deviation for Impulsive Gravitational Waves,” J. Math. Phys. **39** (4), 2201-2212 (1998).

[33] R. Steinbauer, ,,Distributional description of impulsive gravitational waves,” appears in *Nonlinear Theory of Generalized Functions,* edited by M. Grosser, G. Hörmann, M. Kunzinger and M. Oberguggenberger (Pitman Research Notes in Mathematics, Newcastle, 1998).

[34] J. P. Wilson, “Distributional curvature of time dependent cosmic strings,” Class. Quant. Grav. **14**, 3337-3351 (1997).

[35] J. P. Wilson, “Regularity of Axisymmetric Space-Times in General Relativity,” Ph.D. thesis, University of Southampton (1997).