

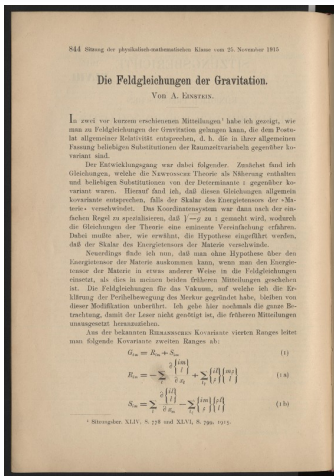
Gravitation und Raumzeitkrümmung

Roland Steinbauer

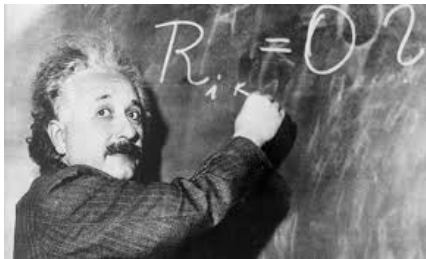
Fakultät für Mathematik, Universität Wien

ÖAW, Gravitation 2015, Oktober 2015

Die Einsteingleichungen (1)



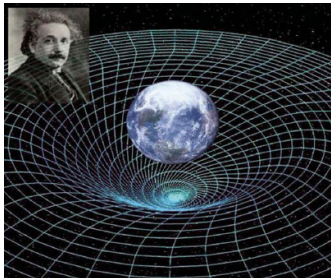
November 1915



Albert Einstein,
'Zur allgemeinen Relativitätstheorie'
'Die Feldgleichungen der Gravitation'
 Sitzungsberichte d. Preussischen Akad. d. Wissenschaften

Die Einsteingleichungen (2)

Die Allgemeine Relativitätstheorie ist eine **geometrische Theorie**:
Sie verknüpft die Raum-Zeit-Geometrie mit dem Materieinhalt



$$\underbrace{R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik}}_{\text{Krümmung}} = \underbrace{\frac{8\pi G}{c^4} T_{ik}}_{\text{Masse/Energie}}$$

Die Krümmung der Raumzeit ist proportional ihrem Energieinhalt.

Überblick

- 1 **Intro:** Einsteins Gleichungen von 1915

Was sagen die Einsteingleichungen?

Wieso ist Krümmung der Raumzeit proportional Materieinhalt?

- 2 **Geometrie:** Warum ist die Schwerkraft geometrisch?
- 3 **Krümmung:** Warum gerade die Krümmung?

Einschub: Was ist überhaupt „die Krümmung“?

Die Konsequenzen:

Grundzüge der Allgemeinen Relativitätstheorie

- 4 Die Geometrie lenkt das Licht ab
- 5 Die Geometrie bewegt Massen
- 6 Die Geometrie formt schwarze Löcher und Raumzeitsingularitäten

Schwerkraft als Eigenschaft des Raumes?

F: Warum krümmt Masse/Energie den Raum?

Besser davor:

F: Warum kann die Schwerkraft überhaupt als

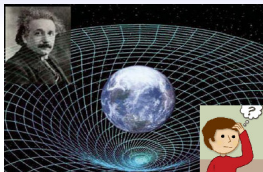
Eigenschaft des Raumes

verstanden werden?

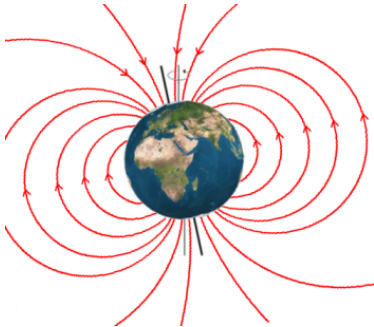
A: Wegen der

Universalität der Schwerkraft:

Die Schwerkraft wirkt auf **jede** Form von Masse (Energie) in gleicher Weise.

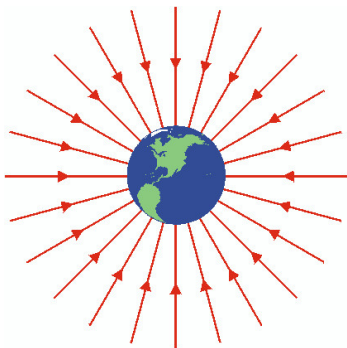


Messung eines Magnetfeldes



Messung der Kraft**differenz** auf Magneten und neutrale Masse

Messung eines Schwerfeldes



Messung der **Differenz** ⚡⚡⚡ **wovon** ???

~> **Universalität** der Schwerkraft

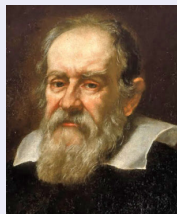
Das Äquivalenzprinzip (1)

Galileo Galilei [1564–1642]

- Alle Körper fallen gleich schnell.

Die Fallgeschwindigkeit eines Körpers hängt **nicht** von seinem Gewicht ab.

- schwere Masse = träge Masse



Galileis Fallgesetz

$$\vec{F} = m_{\text{tr}} \cdot \vec{a} = m_{\text{sch}} \cdot \vec{g}$$

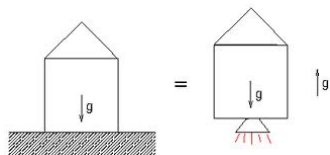
Das Äquivalenzprinzip (2)



Apollo 15: David Scott, der Hammer und die Feder

Das Äquivalenzprinzip (3)

Einsteins glücklichster Gedanke



- Schwerelosigkeit \approx freier Fall
- Gravitationsfeld \approx Beschleunigung

Technisch:

- Ein Beobachter im geschlossenen Labor kann durch kein Experiment feststellen, ob er sich in der Schwerelosigkeit weit weg von Massen befindet oder im freien Fall nahe einer Masse.
- Im lokalen Inertialsystem gelten die Gesetze der SRT.

Schwerkraft ist eine Eigenschaft des Raumes!

F: Warum krümmt Masse/Energie den Raum?

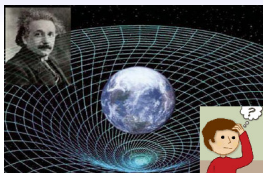
Besser davor:

F: Warum kann die Schwerkraft überhaupt als **Eigenschaft des Raumes** verstanden werden?

A: Wegen der **Universalität der Schwerkraft**:
Die Schwerkraft wirkt auf **jede** Form von Masse (Energie) in gleicher Weise.
O.K.

F: Aber warum **gerade die Krümmung**?

A: Das ist etwas technisch...
daher zuerst ein Einschub: **Was ist Krümmung?**



Inhalt

- 1 **Intro: Einsteins Gleichungen von 1915**
- 2 **Warum ist die Schwerkraft geometrisch?**
- 3 **Warum gerade die Krümmung?**
 - Einschub: Was ist Krümmung?
 - Jetzt wirklich: Warum gerade die Krümmung?
- 4 **Grundzüge der Allgemeinen Relativitätstheorie**
 - Die Geometrie lenkt das Licht ab
 - Die Geometrie bewegt Massen
 - Schwarze Löcher, Raumzeitsingularitäten

Krümmung von Flächen

F: Sind gekrümmte Flächen ungewöhnlich?

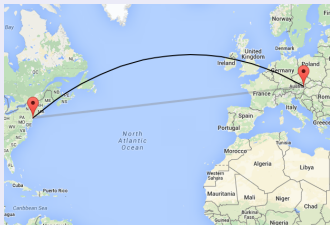
A: Nein!

Wir alle leben auf einer.

F: Was sind die wichtigsten Effekte der Krümmung?



Einfache Konsequenzen

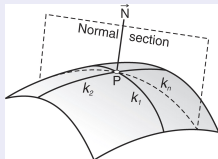


Geodäten ersetzen Geraden

- Kürzeste Verbindungen sind nicht gerade.
- Kürzeste Verbindungen können sich schneiden.

Klassische Geometrie von Flächen

Carl Friedrich Gauß [1777–1855]



In jedem Punkt einer Fläche gibt es eine Richtung **minimaler** und eine Richtung **max. Krümmung**.



Theorema Egregium.

Das Produkt der zugehörigen **Hauptkrümmungen**, die **Gauß-Krümmung** ist eine Invariante.

Moderne Differentialgeometrie

F: Was benötigt man um Geometrie zu betreiben?

A1: Längen- und Winkelmessung

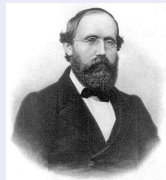
A2: Technisch: ein Skalarprodukt, $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \|\vec{v}\| \|\vec{w}\| \cos \alpha$

Bernhard Riemann [1826–1866]

- **Metrik:** Vorgabe eines Skalarprodukts in jedem Punkt einer n -dimensionalen Fläche
- **Krümmungstensor**

$$R(u, v)w = \nabla_u \nabla_v w - \nabla_v \nabla_u w - \nabla_{[u, v]} w$$

- kodiert die Obstruktion gegen Flachheit
- fasst die 2-dim. Krümmungen zusammen



Inhalt

- 1 **Intro: Einsteins Gleichungen von 1915**
- 2 **Warum ist die Schwerkraft geometrisch?**
- 3 **Warum gerade die Krümmung?**
 - Einschub: Was ist Krümmung?
 - Jetzt wirklich: Warum gerade die Krümmung?
- 4 **Grundzüge der Allgemeinen Relativitätstheorie**
 - Die Geometrie lenkt das Licht ab
 - Die Geometrie bewegt Massen
 - Schwarze Löcher, Raumzeitsingularitäten

Jetzt wirklich: Warum gerade die Krümmung?

F: Warum krümmt Masse/Energie den Raum?

Besser davor:

F: Warum kann die Schwerkraft überhaupt als **Eigenschaft des Raumes** verstanden werden?

A: Wegen der **Universalität der Schwerkraft**:

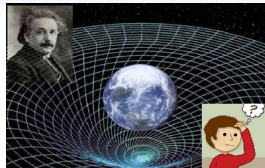
F: Aber warum **gerade die Krümmung**?

A: Das ist etwas technisch...

daher zuerst ein Einschub: **Was ist Krümmung?**

O.K

F: Jetzt aber wirklich: **Warum gerade die Krümmung?**



Newtonsche Mechanik

Isaac Newton [1664–1727]

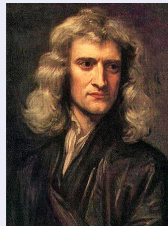
1. Newtonsches Gesetz:

Kräftefreie Körper sind in Ruhe oder bewegen sich auf Geraden.

2. Newtonsches Gesetz:

Kraft = Masse · Beschleunigung

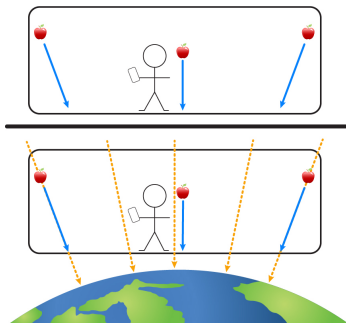
$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$



Gravitationsgesetz:

$$F = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}$$

Gezeitenkräfte



Äpfel und Astronaut
fallen frei Richtung Erdmittelp.

⇒ **relative Beschleunigung**



Niemand fällt!
Äpfel und Astronaut bewegen sich
auf **Geodäten** der Raumzeit.

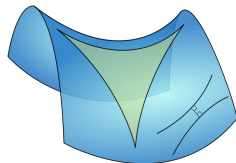
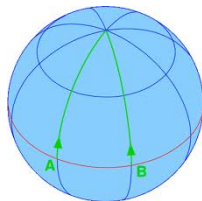
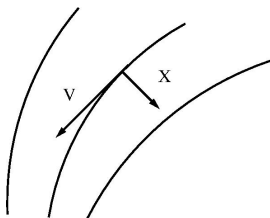
Anwesenheit von Masse

⇒ **relative Beschleunigung**

Riemann Geometrie: Geodätische Deviation

- **Geodäten** ersetzen gerade Linien
(minimale Krümmung,
kürzeste Verbindungen)
- Krümmung bestimmt **Abstände**
zwischen Geodäten

$$\ddot{X} = R(V, X) X$$



Krümmung und Einsteingleichungen



Newtonsche Gezeitenkräfte

$$\ddot{\vec{x}} = \vec{a} = \vec{x} \cdot \Delta\phi = 4 \cdot \pi \cdot G \cdot \rho \cdot \vec{x}$$



Geodätische Deviation

$$\ddot{X} = R(V, X)X$$



Kombiniere das!

$$R(V, X) \sim 4 \cdot \pi \cdot G \cdot \rho$$

$$\vdots$$

$$R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ik}$$

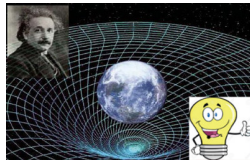


Raumzeitkrümmung, darum!

- **Fazit:** Die Schwerkraft wirkt auf alle Massen/Energien gleich.

- **Qualitativ:**

Die Schwerkraft kann als Eigenschaft des Raumes (der Raumzeit) verstanden werden.



- **Quantitativ:**

Die Krümmung der Raum(zeit) ist proportional zu ihrem Massen- und Energieinhalt.

- **Die ganze Wahrheit:**

$$\underbrace{R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik}} = \underbrace{\frac{8\pi G}{c^4} T_{ik}}$$

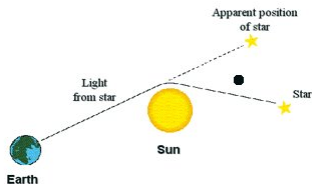
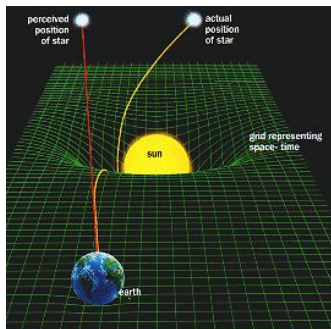
Krümmung

Masse/Energie

Inhalt

- 1 **Intro: Einsteins Gleichungen von 1915**
- 2 **Warum ist die Schwerkraft geometrisch?**
- 3 **Warum gerade die Krümmung?**
 - Einschub: Was ist Krümmung?
 - Jetzt wirklich: Warum gerade die Krümmung?
- 4 **Grundzüge der Allgemeinen Relativitätstheorie**
 - Die Geometrie lenkt das Licht ab
 - Die Geometrie bewegt Massen
 - Schwarze Löcher, Raumzeitsingularitäten

Lichtablenkung im Gravitationsfeld der Sonne

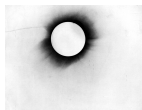


Experimentelle Bestätigung:

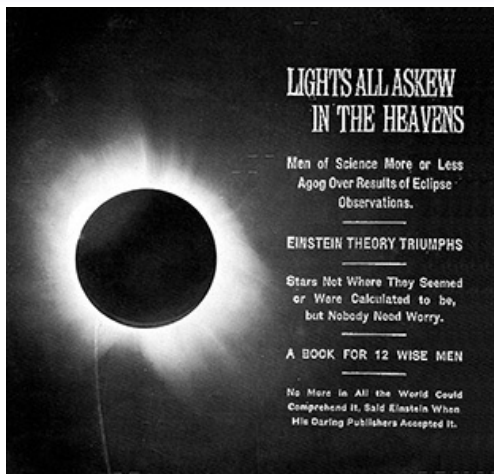
Arthur Eddington

Sonnenfinsternis

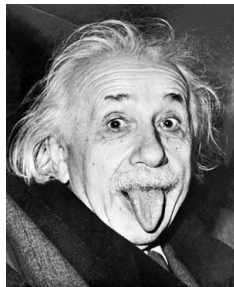
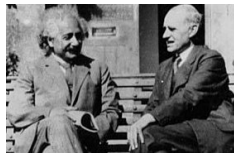
29. Mai 1919



Einstein wird berühmt

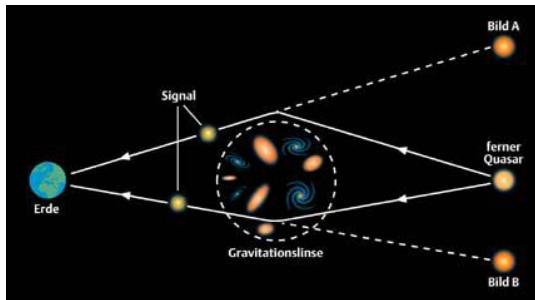


New York Times, 7. November 1919

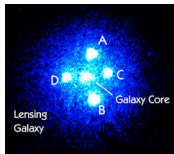


Gravitationslinsen

Das Licht einer fernen Quelle wird im Gravitationsfeld einer dazwischenliegenden Masse (z.B. Galaxie(n Cluster)) abgelenkt. Diese wirkt wie eine **Linse** und kann das Bild verzerren, verstärken oder sogar vervielfältigen.



Einstein Kreuz



Quasar Q2237+030
Linse ZW2237+030

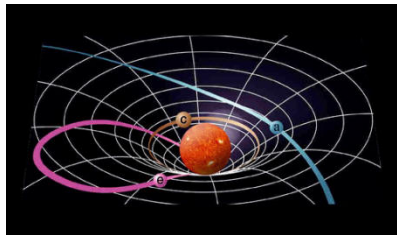
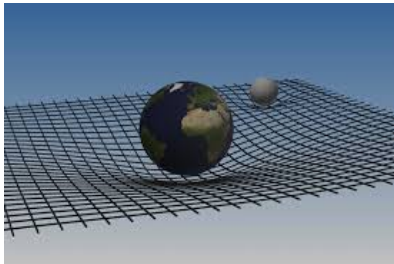
Inhalt

- 1 **Intro: Einsteins Gleichungen von 1915**
- 2 **Warum ist die Schwerkraft geometrisch?**
- 3 **Warum gerade die Krümmung?**
 - Einschub: Was ist Krümmung?
 - Jetzt wirklich: Warum gerade die Krümmung?
- 4 **Grundzüge der Allgemeinen Relativitätstheorie**
 - Die Geometrie lenkt das Licht ab
 - Die Geometrie bewegt Massen
 - Schwarze Löcher, Raumzeitsingularitäten

Bewegung von Massen in der Raumzeit

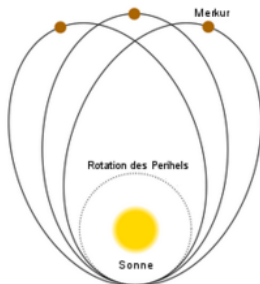
Körper bewegen sich auf Geodäten der Raumzeit.

Analogie: Roulettekugel statt „Masse am Seil“



Periheldrehung des Merkur

Klassischer Test der ART



Beiträge zur Periheldrehung

| Bogensek./Jh | Ursache |
|--------------|------------------|
| 531.63 | andere Planeten |
| 0.0254 | Abplattung Sonne |
| 42.98 | ART |
| 574.64 | Summe |
| 574.10±0.65 | beobachtet |

Inhalt

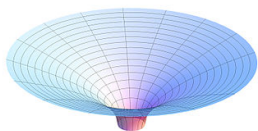
- 1 **Intro: Einsteins Gleichungen von 1915**
- 2 **Warum ist die Schwerkraft geometrisch?**
- 3 **Warum gerade die Krümmung?**
 - Einschub: Was ist Krümmung?
 - Jetzt wirklich: Warum gerade die Krümmung?
- 4 **Grundzüge der Allgemeinen Relativitätstheorie**
 - Die Geometrie lenkt das Licht ab
 - Die Geometrie bewegt Massen
 - Schwarze Löcher, Raumzeitsingularitäten

Die Schwarzschildmetrik

Karl Schwarzschild [1873–1916]

Lösung der Einstein Gleichungen
Gravitationsfeld einer nicht rotierenden Kugel

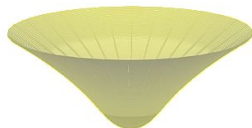
$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$



Außenraumlösung

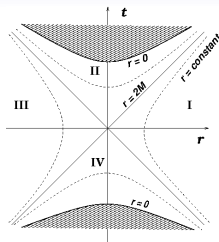
$$r_s = 2M$$

Schwarzschildradius



Lösung für einen Stern

Gravitationskollaps, schwarze Löcher

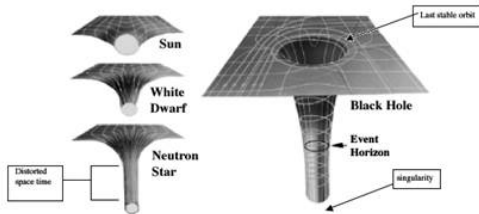


Kruskal Ausdehnung:

Maximale analytische Ausdehnung der Schwarzschildlösung

Astrophysik: Gravitationskollaps, Kontraktion über Schwarzschildradius hinaus

- Stern
- Weisser Zwerg
- Neutronenstern
- Schwarzes Loch



Raumzeitsingularitäten

Singularität: kompliziert zu definieren...

falls es nicht fortsetzbare Geodäten gibt

R. Penrose & S. Hawking, 1965–70

Singularitätentheoreme:

Raumzeitsingularitäten treten unter physikalisch realistischen Bedingungen (ohne Symmetrie!) auf.



Kosmische Zensurhypothese

Raumzeitsingularitäten sind (generisch) hinter einem Ereignishorizont verborgen, also „von Außen nicht sichtbar.“

Schwarze Löcher



Aggregationscheibe eines schwarzen Lochs

Kip Thorne



ENDE

Danke für die Aufmerksamkeit!

Expendic G-02
Sculpture, Aluminium
283 × 283 × 24cm
(c) Tomas Eller, 2009