

Familiennamen:
Vorname:
Matrikelnummer:
Studienkennzahl:

1
2
3
4
G

- R. Steinbauer (Sommersemester 2007)
 H. Schichl (Wintersemester 2006/07)

Note:

Einführung in das mathematische Arbeiten
(14.12.2007)

1. *(Kurvendiskussion)*

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ hat an der Stelle 4 den Funktionswert -3 . Die erste Ableitung von f lautet

$$f'(x) = \frac{x^3}{4} - 3x.$$

- (a) Bestimme die Funktionsgleichung von f . (3 Punkte)
(b) Bestimme Nullstellen, Hoch- und Tiefpunkte von f . (3 Punkte)
(c) Bestimme Wendepunkte und Wendetangenten von f . (2 Punkte)
(d) Skizziere den Graphen von f im Intervall $[-5, 5]$ (1 Punkt)
(e) Berechne den Inhalt des Flächenstücks, das der Graph von f mit den beiden Wendetangenten einschließt. (3 Punkte)

2. (a) *(Analytische Geometrie)* Gegeben sind die Ebene

$$\varepsilon : x + 2y + 3z = -12$$

und die Gerade g durch die Punkte $P_1 = (-3, -4, -5)$ und $P_2 = (-3, -1, 7)$. Berechne die Koordinaten des Schnittpunkts der Geraden g mit der Ebene ε . (5 Punkte)

- (b) *(Gleichung)* Löse die Gleichung $-5e^{3y} + e^{6y} = -6$. (3 Punkte)

3. *Zahlenspiele*

- (a) Zeige die folgende Aussage: Eine Zahl ist genau dann gerade, wenn ihr Quadrat gerade ist. (4 Punkte)

- (b) Berechne $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$. (2 Punkte)

(c) Zeige mittels vollständiger Induktion, dass

$$1 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

gilt. (4 Punkte)

4. (*Sammelsurium*)

(a) Sei f eine Funktion von $A \rightarrow B$. Was besagen die folgenden Aussagen? (2 Punkte)

$$\forall b \in B \exists a \in A : f(a) = b \quad \text{und} \quad \exists b \in B \forall a \in A : f(a) = b$$

(b) Gib eine Partition der Menge $A = \{a, b, 1, 2, t, 27, *, +\}$ an. Für die daraus entstehende Äquivalenzrelation bestimme die Äquivalenzklasse von $+$. (1 Punkt)

(c) Gibt es eine Gruppe mit keinem Element? Gibt es eine Gruppe mit einem Element? Gibt es einen Ring mit einem Element? Gibt es einen Körper mit zwei Elementen? Wenn ja, gib ein Beispiel an, wenn nein, begründe. (3 Punkte)

(d) Definiere den Begriff eines geordneten Körpers (2 Punkte) und zeige, dass aus den Ordnungsaxiomen

$$x \leq y \Leftrightarrow y - x \geq 0$$

folgt. (2 Punkte)