**Familienname:**
**Vorname:**
**Matrikelnummer:**
**Studienkennzahl:**

| | |
|---|---|
| **1** | |
| **2** | |
| **3** | |
| **4** | |
| **G** | |

□ **R. Steinbauer**
□ **H. Schichl**

# Note:

Prüfung zu Einführung in das mathematische Arbeiten (4.6.2004)

(1) *(Kurvendiskussion)* Eine rationale Funktion

$$r = \frac{ax^2 + bx + c}{x + d}$$

mit quadratischem Zählerpolynom hat ihren einzigen Pol, der erster Ordnung ist, bei $x = -1$. Der Punkt $P = (2, 1)$ ist ein Extremwert von $r$, und der Punkt $Q = (-2, 9)$ liegt ebenfalls auf $r$.

(a) Bestimme die Funktionsgleichung von $r$. (4 Punkte)
(b) Ermittle alle Nullstellen, Hoch- und Tiefpunkte von $r$. (2 Punkte)
(c) Bestimme die schräge Asymptote von $r$ und fertige eine Skizze an. (2 Punkte)
(d) Ermittle den Inhalt des endlichen Flächenstücks, das von $r$ und der $x - Achse$ eingeschlossen wird. (2 Punkte)

(2) (a) *(Analytische Geometrie)* Bestimme die Lagebeziehung der drei Ebenen

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 : &\quad -2x_1 - 7x_2 + 3x_3 = -7 \\ \varepsilon_2 : &\quad 8x_1 + x_2 - 3x_3 = -2 \\ \varepsilon_3 : &\quad -x_1 + 7x_2 - 2x_3 = 9. \end{aligned}$$

(4 Punkte)

(b) *(Gleichung)* Bestimme die rellen Lösungen der Gleichung

$$e^{5x-3} - 2e^{3x-2} - 4e^{x-1} = 0.$$

(4 Punkte)

(3) (a) *(Algebra)* Überprüfe, ob die unten definierte algebraische Struktur $(K, \oplus, \otimes)$ ein Unterkörper von $\mathbb{R}$ ist:

$$K := \{a + \pi b | a, b \in \mathbb{Q}\},$$

mit

$$\begin{aligned} (a_1 + \pi b_1) \oplus (a_2 + \pi b_2) &:= a_1 + a_2 + \pi(b_1 + b_2), \\ (a_1 + \pi b_1) \otimes (a_2 + \pi b_2) &:= a_1 a_2 + \pi^2 b_1 b_2 + \pi(a_1 b_2 + a_2 b_1). \end{aligned}$$

(4 Punkte)

(b) *(Vollständige Induktion)* Beweise, dass für jede ungerade natürliche Zahl $n$ die Zahl $n^2 - 1$ durch 8 teilbar ist. (Hinweis: Zeige, dass für alle natürlichen Zahlen der Form $n = 2k+1$ eine natürliche Zahl $\ell$ existiert mit $n^2 - 1 = 8\ell$.) (4 Punkte)

(4) (a) *(Relationen)* Definiere die Begriffe Äquivalenzrelation, Halbordnung und Totalordnung und bestimme die Suprema, Infima, Minima und Maxima (soferne vorhanden) für die folgenden beiden Teilmengen von $\mathbb{R}$

$$A := (-1, 3], \qquad B := \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 3\}.$$

(8 Punkte)

(b) *(Logik, Mengenlehre)*

(i) Formuliere und beweise die Gesetze von De Morgan für Mengen.

(ii) Drücke die logische Funktion $f$, gegeben anhand der folgenden Wahrheitstabelle, durch $\wedge$, $\vee$ und $\neg$ aus.

| a | b | c | f(a,b,c) |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

(6 Punkte)