

Aufgabensammlung

zur Vorlesung

Einführung in das mathematische Arbeiten

Fakultät für Mathematik
Universität Wien
Wintersemester 2010/11

Dieses Skriptum enthält Übungsaufgaben zur Vorlesung *Einführung in das mathematische Arbeiten*. Diese findet geblockt am Anfang des Semesters (5.10.—8.11.2010) statt und wird in diesem Zeitraum von den Übungen zu den Hauptvorlesungen *Übungen zu „Einführung in die Analysis“* und *Übungen zu „Einführung in die Lineare Algebra und Geometrie“* begleitet. Dementsprechend zerfällt dieses Skriptum in die beiden Teile „Analysis“ und „Lineare Algebra und Geometrie“. Die entsprechenden Aufgaben bilden den Stoff der jeweiligen Übungen zu den ersten Terminen (d.h. in den Kalenderwochen 42 bis ca. 45; die Übungen beginnen in der Woche ab dem 18.10.2010).

Die hier zusammengestellten Beispiele dienen der eigenständigen Erarbeitung und Vertiefung des Stoffes aus der Vorlesung sowie einiger weniger ausgewählten Aspekte des Schulstoffs. Sie entfalten ihre volle positive Wirkung nur dann, wenn sie *selbständig* bearbeitet bzw. gelöst werden! In den Übungen werden die Aufgaben dann von Studierenden vorgelesen und diskutiert.

R. Steinbauer, September 2010

Inhaltsverzeichnis

ANALYSIS	3
Schulstoff 1: Elementare Funktionen und Trigonometrie	3
Erste Beweise	4
Indizes, Summen- und Produktzeichen, Induktion	5
Schulstoff 2: Differenzieren und Kurvendiskussion	6
Mengen, Relationen	7
Ordnungseigenschaften, Betrag	9
Komplexe Zahlen	10
LINEARE ALGEBRA UND GEOMETRIE	12
Schulstoff: Gleichungen und Ungleichungen	12
Mathematische Grundlagen, Logik	13
Abbildungen	15
Gruppen, Ringe, Körper	17
Analytische Geometrie	19

Analysis

Schulstoff 1: Elementare Funktionen und Trigonometrie

1. *Rechnen mit Potenzen und Logarithmen 1.* Wiederholen Sie die Definition des Logarithmus sowie die Rechenregeln für Logarithmen und Potenzen (Schulstoff, 6. Klasse AHS) und berechnen Sie—ohne einen Taschenrechner zu verwenden:

- | | |
|--|--------------------------------|
| (a) $\log_3 27$ | (f) $4^{\log_2 5}$ |
| (b) $\log_{19} 361$ | (g) $8^{\frac{1}{3} \log_2 3}$ |
| (c) $4^x = 1024$ | (h) $e^{\frac{1}{2} \log 7}$ |
| (d) $2^x = 5$ (verwenden Sie die Basis 2) | (i) $a^{4 \log_a x}$ |
| (e) $2^x = 5$ (verwenden Sie die Basis e) | (j) $e^{5 \log 4x}$ |

Hinweis: Wir folgen hier der Konvention \log (ohne Basis) für den Logarithmus zur Basis e (e , die Eulersche Zahl) zu schreiben.

2. *Rechnen mit Potenzen und Logarithmen 2.*

- (a) Lösen Sie die Gleichung $4e^{4y} + 6e^{2y} = 4$.
(b) Lösen Sie das Gleichungssystem $4^x 2^y = 128$, $7^{x-y} = 49$.

3. *Textaufgabe (Bakterienkultur).* Die Anzahl der Bakterien in einer Kultur wird näherungsweise durch die Funktion

$$N(t) = N_0 a^t$$

beschrieben, wobei $N(t)$ die Anzahl der Bakterien zum Zeitpunkt t (in Stunden) bezeichnet, N_0 die Anzahl der Bakterien zum Anfangszeitpunkt ($t = 0$) und $a > 0$ eine von der Art der Bakterien abhängige Konstante ist.

Eine Bakterienkultur wächst um 15% in der Stunde.

- (a) Bestimmen Sie den Wert der Konstanten a .
(b) Wenn zu Beginn ($t = 0$) 200000 Bakterien vorhanden sind, nach wievielen Stunden sind es 500000?
(c) Nach welcher Zeit verdoppelt sich die Anzahl der Bakterien? Ist das Ergebnis unabhängig von der Anzahl der Bakterien?

4. *Sinus und Cosinus.* Wiederholen Sie die Definition der Winkelfunktionen (Schulstoff, 6. Klasse AHS), und ihre Funktionsgraphen.

- (a) Bestimmen Sie alle reellen x , für die $\sin x = \frac{1}{2}$ gilt.
(b) Bestimmen Sie alle $x \in [0, 2\pi]$, für die $\sin x = \frac{1}{2}$ gilt.

- (c) Bestimmen Sie alle $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, für die $\sin x = \frac{1}{2}$ gilt.
 (d) Bestimmen Sie alle $x \in [\pi, 2\pi]$, für die $\sin x = \frac{1}{2}$ gilt.
 (e) Bestimmen Sie alle $x \in [0, \pi]$, für die $\cos x = \frac{1}{2}$ gilt.
 (f) Bestimmen Sie alle $x \in [-\pi, 0]$, für die $\cos x = \frac{1}{2}$ gilt.
 (g) Bestimmen Sie alle $x \in [-2\pi, 0]$, für die $\cos x = \frac{1}{2}$ gilt.

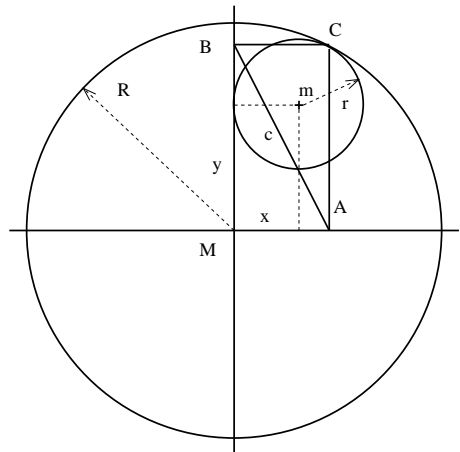
5. *Sinus- und Cosinussatz.*

- (a) Von einem Dreieck sind $c = 7$, $\alpha = \frac{2\pi}{9}$, $\beta = \frac{2\pi}{5}$ gegeben. Berechnen Sie die übrigen Seiten und Winkel!
 (b) Von einem Dreieck sind $a = 128.3$, $b = 175.4$, $c = 91.4$ bekannt. Berechnen Sie die Winkel!

6. *Geometrie mit Scharfblick.*

Einem Kreis mit Radius R , dessen Mittelpunkt M im Ursprung liegt, ist ein kleinerer Kreis mit Radius r eingeschrieben (siehe Skizze). Sein Mittelpunkt m habe die Koordinaten x und y . Der Berührungspunkt C der beiden Kreise ist einer der Eckpunkte eines achsenparallelen Dreiecks, dessen weitere Eckpunkte A und B auf den Achsen liegen. Bestimmen Sie die Länge der Seite c dieses Dreiecks.

Hinweis: Diese Aufgabe lässt sich elegant gänzlich ohne Rechnung lösen!



Erste Beweise

7. *Die Summe ungerader Zahlen.*

Beweisen Sie, dass die Summe zweier ungerader Zahlen gerade ist.

Hinweis: Eine ungerade Zahl a lässt sich als $a = 2k + 1$ für ein passendes ganzes k schreiben.

8. *Indirekter Beweis.* Beweisen Sie, dass es keine ganzen Zahlen a und b gibt, sodass

$$6a + 18b = 50$$

gilt.

Hinweis: Gehen Sie indirekt vor indem Sie annehmen, dass es solche Zahlen gibt. Dann finden Sie einen Teiler der linken Seite der Gleichung, der die rechte Seite nicht teilt.

Indizes, Summen- und Produktzeichen, Induktion

9. *Summen- und Produktschreibweise 1.* Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke mit Hilfe von Summen- bzw. Produktzeichen:

- (a) $4 + 8 + 16 + 32 + 64$
- (b) $a_4 + a_8 + a_{16} + a_{32} + a_{64}$
- (c) $3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdots (2m - 1)$
- (d) $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + 9$

10. *Summen- und Produktschreibweise 2.* Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke ohne Verwendung der Summen- bzw. Produktzeichen an:

- (a) $\sum_{k=3}^7 2^{k-1}$
- (b) $\sum_{k=-2}^2 b_{-k}$
- (c) $\prod_{j=2}^5 k^j$
- (d) $\prod_{j=2}^5 k^2$
- (e) $\sum_{j=2}^4 \prod_{k=1}^3 (jk - 2)$
- (f) $\sum_{k=0}^m \sum_{j=0}^m \binom{k}{j}$

11. *Summen- und Produktschreibweise 3.* Überprüfen Sie, welche der folgenden Gleichungen gelten. Sollten Sie in einer Gleichung einen Fehler finden, so stellen Sie die rechte Seite richtig.

- (a) $\sum_{i=0}^5 b_i = \sum_{j=-2}^7 b_{j+2}$
- (b) $\sum_{i=1}^k (b_i - b_{i-1}) = b_k - b_0$
- (c) $\prod_{i=1}^n \frac{a_i}{a_{i-1}} = \frac{a_0}{a_n}$
- (d) $\sum_{k=0}^n x^{2k+1} = -\frac{1}{2} \sum_{j=0}^{2n+1} \left((-1)^j - 1 \right) x^j$
- (e) $\sum_{k=1}^n c_{2k-1} = \sum_{i=0}^{n-1} c_{2k+1}$
- (f) $\sum_{j=0}^n k^{2j} = \sum_{r=0}^{2n} k^r - \sum_{s=0}^n k^{2s+1}$
- (g) $(\log 3) \sum_{j=0}^n a_j = \log \prod_{i=0}^n 3^{a_i}$
- (h) $\sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k a^j b^{k-j} = \sum_{j=0}^n \sum_{k=j}^n a^j b^{k-j}$

12. *Vollständige Induktion.* Beweisen Sie die folgenden Identitäten für alle angegebenen $n \in \mathbb{N}$:

- (a) $\sum_{k=0}^n k^3 = \frac{1}{4} n^2 (1 + n)^2, n \geq 1$
- (b) $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}, q \neq 1, n \in \mathbb{N}$

$$(c) (1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^{n-1}})(1+x^{2^n}) = \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}, \quad x \neq 1, n \in \mathbb{N}$$

$$(d) \sum_{k=0}^n 3^{-k} = \frac{3^{n+1} - 1}{2 \cdot 3^n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

13. *Pizzaschnitten.* Beweisen Sie, dass sich eine Pizza durch n geradlinige Schnitte, die von Rand zu Rand verlaufen, in höchstens $\frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$ Stücke teilen lässt.

14. *Bernoullische Ungleichung.* Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

für alle $x \geq -1$ und $n \geq 1$ gilt.

Schulstoff 2: Differenzieren und Kurvendiskussion

15. *Differenzieren 1.* Differenzieren Sie nach der angegebenen Variable.

$$(a) p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

$$(e) x(z) = \cos(\tan z)$$

$$(b) f(x) = \sqrt{\sqrt[5]{x} + \sqrt[3]{x}}$$

$$(f) g(x) = \frac{c^x}{x^c}$$

$$(c) f(x) = \frac{(1+\sqrt{x})^2}{x-\sqrt{x}}$$

$$(g) g(c) = \frac{c^x}{x^c}$$

$$(d) f(y) = \sqrt{\frac{\cos y - 1}{\sin y + 1}}$$

$$(h) h(x) = x^x$$

$$(i) h(x) = x^{x^2}$$

$$(j) h(x) = x^{x^x}$$

16. *Differenzieren 2.* Berechnen Sie die ersten vier Ableitungen von:

$$(a) p(x) = ax^2 + bx + c$$

$$(b) f(x) = (x^2 - 2)^5$$

17. *Kurvendiskussion 1.* Unter Diskussion des Graphen einer Funktion (Kurvendiskussion) verstehen wir die Bestimmung des (maximalen) Definitionsbereichs, der Nullstellen, Polstellen, Asymptoten, Extremwerte, Monotonie, Wendepunkte und des Krümmungsverhaltens.

Diskutieren Sie die folgenden Funktionen und zeichnen Sie den Graphen (in einem „vernünftig“ gewählten Bereich).

$$(a) f(x) = \frac{2}{27}x^4 - \frac{4}{9}x^3$$

- (b) $g(x) = \frac{x^3}{x^2-16}$
- (c) $h(x) = \frac{x}{2} + 2 \sin x$

18. *Kurvendiskussion 2.*

- (a) Ermitteln Sie die Koeffizienten der Polynomfunktion 3. Grades

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

deren Graph im Ursprung den Wendepunkt und in $A = (2, \frac{2}{3})$ die Steigung $k_A = 3$ hat. Diskutieren Sie die Funktion und zeichnen Sie ihren Graphen im Intervall $[-3, 3]$.

- (b) Der Graph der Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x - 5}$$

hat in $P = (0, -\frac{9}{5})$ die Steigung $k = \frac{16}{25}$. Ermitteln Sie die Koeffizienten a , und b , diskutieren Sie die Funktion und zeichnen Sie den Graphen in $[-4, 12]$.

Mengen, Relationen

19. *Mengenoperationen konkret.* Gegeben $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{2, 4, 6, 8\}$, $Z = \{1, 3, 5, 7\}$. Bestimmen Sie:

- (a) $(X \setminus Y) \cup Z$
- (b) $(X \cup Z) \setminus Y$
- (c) $(X \cup Y) \setminus (Y \cup Z)$
- (d) $X \cup (Y \setminus Z)$
- (e) $(Y \cup X) \setminus (X \cap Z)$

20. *Rechengesetze für Mengenoperationen.* Beweisen Sie

- (a) eines der Distributivgesetze und
- (b) eines der De Morgan-Gesetze

aus Theorem 4.1.29. Verwenden Sie für einen der beiden Beweise die Mengentafel, für den anderen die Definitionen der Mengenoperationen und Theorem 3.1.10 (wie im Beweis des Distributivgesetzes in der Vorlesung).

21. *Mengenoperationen abstrakt.* Seien A und B Mengen. Zeigen Sie:

- (a) $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subseteq B$
- (b) $(A \cap B) \cup A = A$
- (c) $(B \cup A) \setminus (B \cap A) = (B \setminus A) \cup (A \setminus B)$

22. *Grundeigenschaften von Relationen.* Welche der Eigenschaften „reflexiv“, „symmetrisch“ und „transitiv“ haben die folgenden Relationen R auf M ?

- (a) $a R b \Leftrightarrow a$ ist Primteiler von b ($M = \mathbb{N}$)
- (b) $a R b \Leftrightarrow |a| = |b|$ ($M = \mathbb{R}$)
- (c) $a R b \Leftrightarrow (a$ teilt b) oder $(b$ teilt a) ($M = \mathbb{N}$)
- (d) $a R b \Leftrightarrow a = 5^m \cdot b$ für ein $m \in \mathbb{Z}$ ($M = \mathbb{N}$)

23. *Äquivalenzrelation oder nicht?* Sei X die Menge aller Menschen, $x, y \in X$. Welche der folgenden Relationen sind Äquivalenzrelationen?

- (a) x steht zu y in Relation, falls x die gleiche Muttersprache hat wie y .
- (b) x steht zu y in Relation, falls x älter oder genauso alt wie y ist.
- (c) x steht zu y in Relation, falls x und y sich gegenseitig kennen.

24. *Äquivalenzrelationen.*

- (a) Auf der Menge \mathbb{Z} der ganzen Zahlen betrachten wir die Relation

$$x \equiv y \Leftrightarrow 4 \text{ teilt } x - y.$$

Zeigen Sie, dass es sich dabei um eine Äquivalenzrelation handelt.

- (b) Finden Sie weitere Beispiele für Äquivalenzrelationen.
- (c) Bei einer Versuchsreihe werden 2 Messergebnisse als gleich betrachtet, wenn sie sich um weniger als $10^{-22}m$ unterscheiden. Definiert dieser Gleichheitsbegriff eine Äquivalenzrelation?

Ordnungseigenschaften, Betrag

25. *Ordnung und Schranken konkret.* Wir betrachten \mathbb{R} mit der natürlichen Ordnung \leq . Sind die folgenden Teilmengen von \mathbb{R} nach oben bzw. nach unten beschränkt? Wenn ja, gib Infimum bzw. Supremum an. Handelt es sich dabei jeweils um Minima resp. Maxima?

- | | |
|---------------------------------|---|
| (a) $[-4, 18]$ | (e) $(-\infty, 4] \cap (1, \infty)$ |
| (b) $(-3, -2)$ | (f) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-n, n)$ |
| (c) $[-3, 2)$ | (g) \emptyset |
| (d) $(-3, -2) \cup [4, \infty)$ | (h) \mathbb{N}_g , die geraden natürlichen Zahlen |

26. *Ordnungsaxiome.* Sei $(K, +, \cdot, \leq)$ ein geordneter Körper. Beweisen Sie folgende Aussagen für $a, b, c, d \in K$, *ausschließlich* unter Verwendung der Definition eines geordneten Körpers und der Proposition 6.3.2. Begründen Sie jeden ihrer Schritte!

- (a) Gleichsinnige Ungleichungen „dürfen“ addiert werden, genauer: aus $a \leq b$ und $c \leq d$ folgt $a + c \leq b + d$, oder in leicht verständlicher Symbolik

$$\begin{array}{r} a \leq b \\ c \leq d \\ \hline a + c \leq b + d \end{array}$$

- (b) Gleichsinnige Ungleichungen „dürfen“ immer dann miteinander multipliziert werden, wenn alle Glieder nicht negativ sind, genauer: aus $0 \leq a \leq b$ und $0 \leq c \leq d$ folgt $ac \leq bd$, oder in leicht verständlicher Symbolik

$$\begin{array}{r} 0 \leq a \leq b \\ 0 \leq c \leq d \\ \hline ac \leq bd \end{array}$$

Bemerkung: Aus (a) folgt (setze $c = 0$) dass eine Kleinergleichbeziehung wahr bleibt, falls auf der rechten Seite eine positive (sogar nichtnegative) Zahl addiert wird; man sagt: die Abschätzung $a \leq b$ wird vergrößert, wenn eine positive Zahl zu b addiert wird.

27. *Eigenschaften des Betrags 1.* Zeigen Sie für $x, y \in \mathbb{R}$

- (a) $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|} \quad (y \neq 0),$
- (b) $\left| |x| - |y| \right| \leq \begin{cases} |x - y| \\ |x + y| \end{cases}.$

28. *Betragsungleichungen explizit.* Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Ungleichungen.

(a) $|x - 1|^2 + |y|^2 = 1.$

(b) $3|x| + 2|y| \leq 1.$

(c) $|x| \cdot |y| \leq 1.$

29. *Unendlich kleine Zahlen?*

Zeigen Sie, dass für $x \in \mathbb{R}$ gilt: Ist $0 \leq x \leq \varepsilon$ für jedes $\varepsilon > 0$, so folgt $x = 0$.

30. *Eigenschaften des Betrags.* Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $x^2 = |x^2| = |x|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(b) $|y - x| = \max(x, y) - \min(x, y)$

(c) Seien $x, x_0 \in \mathbb{R}$ und $\mathbb{R} \ni \varepsilon > 0$. Dann gilt

$$|x| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x < \varepsilon \quad \text{und} \quad |x - x_0| < \varepsilon \Leftrightarrow x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon.$$

31. *Cauchyungleichung.* Zeigen Sie für $x, y \in \mathbb{R}$ die Ungleichung

$$|xy| \leq \frac{x^2 + y^2}{2}.$$

Hinweis: Verwenden Sie die bekannten Formeln für $(x \pm y)^2$ und Proposition 6.3.2(v), also die Tatsache, dass Quadrate nichtnegativ sind.

Komplexe Zahlen

32. *Rechnen mit komplexen Zahlen 1.* Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Zahlen $|z|$, $\arg z$, $1/z$, \sqrt{z} :

(a) $z = 4 + 7i$

(c) $z = -i$

(b) $z = 6 - 5i$

(d) $z = 1 + i$

33. *Rechnen mit komplexen Zahlen 2.* Schreiben Sie die folgenden Zahlen in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$:

(a) $\frac{4 + i}{6 - i}$

(c) $(6 + 4i)^4$

(b) $\left| \frac{1 - 6i}{3 + i} \right|$

(d) i^{102}

(e) $\sum_{n=1}^{4322} i^n$

34. *Rechnen mit komplexen Zahlen 3.*

- (a) Multiplizieren Sie $2 + \frac{3}{4}i$ mit $-5 - \frac{i}{3}$. Wie sieht das in der komplexen Zahlenebene aus?
- (b) Was ist in \mathbb{C} die Inverse zu $\frac{1}{2} - \frac{2}{3}i$?

35. *Komplexe Nullstellen von Polynomen.* Bestimmen Sie alle (auch die komplexen) Nullstellen der Polynome

- (a) $p(x) = 2 + x + 2x^2 + x^3$
- (b) $p(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 12$
- (c) $p(z) = z^2 + (1 + i)z + i$
- (d) $p(z) = z^4 + (2 + i)z^3 + (3 + 2i)z^2 + (4 + i)z + 2$

Lineare Algebra und Geometrie

Schulstoff: Gleichungen und Ungleichungen

1. *Lineare Gleichungssysteme.* Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme:

$$(a) \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 4 \\ 2x_1 - 2x_2 = 3 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x - y = a \\ x + y = b \end{cases} \quad a, b \in \mathbb{R}, \text{ (konstant)}$$

$$(c) \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 = 5 \\ x_1 + 3x_3 = 1 \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} 5a - 2b + 3c - 4d = 0 \\ 2a + b = 0 \\ 3c - 2d = x \\ a + 6c = y \end{cases} \quad x, y \in \mathbb{R}, \text{ (konstant)}$$

2. *Ungleichungen 1.* Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden (Systeme von) Ungleichungen:

$$(a) 4 - 3x < 2x + 3 \leq 3x - 4$$

$$(b) x < x + 3 < 6 \leq 5x - 1$$

$$(c) \frac{x^2 - 2}{x - 1} \leq 2$$

$$(d) x(x + 2) - 8 \geq 0$$

3. *Ungleichungen 2.* Bestimmen Sie zeichnerisch für welche (x, y) in der Ebene folgende Ungleichungen gelten:

$$(a) x < 5 \text{ und } x + y \leq 1$$

$$(b) x + y \leq 1 \text{ und } x^2 + y^2 \geq 1$$

$$(c) 3y^2 - 4 \leq -3x^2$$

$$(d) 2x^2 + 3y^2 \leq 12$$

Mathematische Grundlagen, Logik

4. Fallunterscheidungen.

- (a) Zeigen Sie $\max(x, y) + \min(x, y) = x + y$.
 (b) Berechnen Sie $\max(x, y) - \min(x, y)$.

Hinweis: Das Maximum resp. Minimum zweier Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$\max(x, y) := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq y \\ y & \text{falls } x \leq y \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad \min(x, y) := \begin{cases} y & \text{falls } x \geq y \\ x & \text{falls } x \leq y. \end{cases}$$

5. Kronecker-Delta.

Schreiben Sie die durch ihre Einträge a_{ij} gegebene Matrix A explizit an.

- (a) $a_{ij} = \delta_{ij} \quad (1 \leq i, j \leq 3)$
 (b) $a_{ij} = 2\delta_{i+1,j} + 3\delta_{i,j+1} \quad (1 \leq i, j \leq 4)$

6. Binomialkoeffizient. Wiederholen Sie den Begriff des Binomialkoeffizienten und beweisen Sie die folgenden Identitäten.

$$(a) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n \qquad (b) \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

Hinweis: Diese Aufgaben bewältigen Sie am einfachsten mit einem „Trick“: Formulieren Sie die rechten Seiten mit Hilfe des Binomischen Lehrsatzes!

7. Indirekter Beweis 1. Beweisen Sie die folgende Aussage für ganze Zahlen a, b und c : Falls a das Produkt bc nicht teilt, dann teilt a auch b nicht.

8. Indirekter Beweis 2. Zeigen Sie folgende Verallgemeinerung der Aufgabe 8 aus dem Analysisteil: Seien a, b und c ganze Zahlen und angenommen es gibt ein d , das a und b teilt, aber c nicht teilt. Dann hat die Gleichung

$$ax + by = c$$

keine ganzzahligen Lösungen x und y .

9. Disjunktive Normalform der Implikation. Bestimmen Sie die disjunktive Normalform der Implikation $a \Rightarrow b$ und vereinfachen Sie diese bis zur konjunktiven Normalform $\neg a \vee b$. Begründen Sie jeden Ihrer Umformungsschritte (mit einer der Rechenregeln aus Theorem 3.1.10.)

10. *Disjunktive und konjunktive Normalform.* Gegeben ist die unten stehende Schaltwert-tabelle. Bestimmen Sie disjunktive und konjunktive Normalform dieser Schaltung und versuchen Sie diese jeweils soweit als möglich zu vereinfachen.

a	b	c	$f(a, b, c)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

11. *Äquivalente Aussagen.* Beweisen Sie, dass

$$(p \Rightarrow q) = (\neg q \Rightarrow \neg p)$$

und formulieren Sie gemäß dieser Regel äquivalente Aussagen zu:

- (a) $\forall n \in \mathbb{N}: n^2 > n \Rightarrow n > 1$
 (b) $\forall n \in \mathbb{N}: 3 \mid n \Rightarrow 4 \mid n$
 (c) $\forall n \in \mathbb{N}: n^3 \text{ ungerade} \Rightarrow n \text{ ungerade}$

Hinweis: Das Zeichen „ \mid “ bedeutet „teilt“.

12. *Logik 1.* Wir betrachten die Aussagen p , q , r und s über deren Wahrheitswert wir folgendes wissen: p und s sind wahr, q und r sind falsch. Welche der folgenden Aussagen ist wahr und welche ist falsch?

- (a) $p \vee r$ (c) $\neg(p \vee q)$
 (b) $(r \wedge s) \vee q$ (d) $\neg s \vee \neg r$

13. *Logik 2.* Welche der folgenden Aussagen ist eine Tautologie, welche eine Kontradiktion und welche keines von beiden?

- (a) $p \vee (\neg p \wedge q)$ (c) $(p \wedge \neg q) \wedge (\neg p \vee q)$
 (b) $p \vee q \Leftrightarrow (\neg p \Rightarrow q)$ (d) $(p \vee (\neg p \vee q)) \vee \neg(q \wedge s)$

14. *Verneinung.* Bilden Sie die Verneinung der folgenden Aussagen:

- (a) Alle Schwammerl sind giftig oder schwer zu finden.

(b) Alle Schwammerl sind entweder giftig oder schwer zu finden.

Hinweis: Wir folgen hier der Konvention aus der Vorlesung, die Formulierung „entweder ... oder“ als *ausschließendes Oder* (genau eine der (beiden) Alternativen trifft zu) zu interpretieren. Die Formulierung „oder“ ist natürlich als das (mathematische) *einschließende Oder* (mindestens eine der (beiden) Alternative trifft zu) zu lesen. Falls Ihnen dieser Hinweis Kopfzerbrechen bereitet, dann wiederholen Sie schleunigst den entsprechenden Abschnitt aus der Vorlesung.

(c) Es gibt Vierecke, die genau drei rechte Winkel haben.

(d) Wenn zwei Geraden einen gemeinsamen Punkt besitzen, dann sind sie nicht parallel.

15. *Quantoren.* Begründen Sie, warum die folgenden Aussagen wahr bzw. falsch sind:

(a) $\forall x \in \mathbb{Z} : \exists y \in \mathbb{Z} : x + y = 0$

(b) $\forall x \in \mathbb{N} : \exists! y \in \mathbb{Z} : x + y = 1$

(c) $\exists x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R} : x = y$

(d) $\forall x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} : x = y$

(e) $\forall x \in \mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} | x > 0\} : \exists y \in \mathbb{R}^+ : x < y$

(f) $\exists x \in \mathbb{R}_0^+ := \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\} : \forall y \in \mathbb{R}_0^+ : x \leq y$

Abbildungen

16. *Bild und Urbild.* Wiederholen Sie die Definition des Bildes und des Urbildes einer Menge unter einer Abbildung. Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und die Mengen A_i, B_i ($i = 1, 2, 3$) die Bildmengen $f_i(A_i)$ sowie die Urbildmengen $f_i^{-1}(B_i)$:

(a) $f_1(x) = -x + 1, A_1 = \{0, 1, 2\}, B_1 = (0, 1)$

(b) $f_2(x) = x^2 - 1, A_2 = \{-1, 1\}, B_2 = \{-1, 0\}$

(c) $f_3(x) = a$ ($a \in \mathbb{R}$ konstant), $A_3 = \{-1, 0\} \cup (1, 4), B_3 = \{a\}$

17. *Injektiv, Surjektiv, Bijektiv 1.*

(a) Sei $f : A \rightarrow B$ eine Abbildung von der Menge A in die Menge B . Geben sie die (genauen(!)) Definitionen für Injektivität, Surjektivität und Bijektivität von f an.

- (b) Sind die folgenden Funktionen, injektiv, surjektiv, bijektiv? Begründen Sie Ihre Antworten.

$$f_1 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto n^4$$

$$f_2 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, n \mapsto n^4$$

$$f_3 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}, x \mapsto -x + 1$$

$$f_4 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 4x + 1$$

$$f_5 : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1], x \mapsto \cos x$$

18. *Injektiv, Surjektiv, Bijektiv 2.*

- (a) Geben Sie jeweils eine injektive und nicht surjektive, eine surjektive und nicht injektive, eine bijektive und eine weder injektive noch surjektive Funktion von A nach B an, wobei A und B geeignete Teilmengen von \mathbb{R} sind. Lassen Sie dabei Ihrer Phantasie freien Lauf und greifen Sie weder auf die Funktionen der vorigen Aufgabe noch auf die Beispiele aus der Vorlesung zurück.
- (b) Gibt es zwei Funktionen f, g , die beide nicht bijektiv sind, sodass die Zusammensetzung $f \circ g$ bijektiv ist?
- (c) Gibt es zwei Funktionen f, g , die beide nicht injektiv sind, sodass die Zusammensetzung $f \circ g$ injektiv ist?

19. *Urbildmenge.* Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Funktion, und seien $A, B \subseteq Y$ Teilmengen. Beweisen Sie die folgenden Aussagen und geben Sie jeweils eine verbale Formulierung der Form: „Das Urbild des Durchschnitts zweier Mengen ist ...“ an.

(a) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$,

(b) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

Falls Sie sich durch diese beiden Aufgaben nicht genügend herausgefordert fühlen, dann beweisen Sie die folgende Verallgemeinerung für beliebige Durchschnitts bzw. Vereinigungen:

$$f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(A_i)$$

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(A_i)$$

Hier ist I eine beliebige Indexmenge und die A_i ($i \in I$) sind beliebige Mengen.

(c) $f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$.

Hinweis: Lassen Sie sich vom relativ hohen Abstraktionsgrad der Aufgabe nicht entmutigen! Gehen Sie formal vor und beginnen Sie zB. den Beweis von (a) mit der definitionsgemäßen Formulierung, dass x ein Element der linken Menge in der Gleichung ist, also $x \in f^{-1}(A \cap B) \Leftrightarrow f(x) \in A \cap B$. Nun verwenden Sie die Definition für den Durchschnitt zweier Mengen ... na sehen Sie, nach einer weiteren Verwendung

der Definition des Urbilds und des Durchschnitts haben wir gezeigt, dass x Element der rechten Seite der Gleichung ist, also die Gleichheit gilt!

20. *Bildmenge.* Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Funktion, und seien $A, B \subseteq X$ Teilmengen. Untersuchen Sie, welche Eigenschaften (injektiv, surjektiv, bijektiv) für f nötig sind, damit die nachstehenden Gleichungen erfüllt sind. Muss bzw. kann man das $=$ durch \subseteq oder \supseteq ersetzen, damit die Beziehung auch für allgemeine f gilt? Geben Sie schließlich—wie im obigen Beispiel—eine verbale Formulierung für jede der Eigenschaften an.

(a) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$,

(b) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

Analog zum vorigen Beispiel gilt hier die Verallgemeinerung auf beliebige Durchschnitte bzw. Vereinigungen. Na, motiviert für einen Versuch?

(c) $f(X \setminus A) = Y \setminus f(A)$.

Gruppen, Ringe, Körper

21. *Gruppenaxiome.*

- (a) Überprüfen Sie, ob die folgenden auf \mathbb{R} definierten Verknüpfungen \otimes , \times und \odot assoziativ resp. kommutativ sind:

$$a \otimes b := ab - 3,$$

$$a \times b := ab - 3b,$$

$$a \odot b := 6a + 6b + 3ab + 10 = 3(a + 2)(b + 2) - 2.$$

- (b) Stellen Sie (durch Nachprüfen der Gruppenaxiome) fest, ob (\mathbb{R}, \oplus) eine abelsche Gruppe ist, wobei die Verknüpfung durch

$$a \oplus b := a + b + 3$$

definiert ist.

22. *Einheitswurzeln.* Zeigen Sie, dass die drei komplexen Lösungen der Gleichung $x^3 = 1$ eine abelsche Gruppe bezüglich der Multiplikation komplexer Zahlen bilden. Vergleichen Sie ihre Multiplikationstabelle mit derjenigen der additiven Gruppe \mathbb{Z}_3 .

23. $\mathbb{Q}[\sqrt{7}]$. Gegeben sei die Menge

$$\mathbb{Q}[\sqrt{7}] := \{a + b\sqrt{7} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

mit den Operationen

$$(a + b\sqrt{7}) \oplus (a' + b'\sqrt{7}) := (a + a') + (b + b')\sqrt{7}$$

$$(a + b\sqrt{7}) \otimes (a' + b'\sqrt{7}) := (aa' + 7bb') + (ab' + a'b)\sqrt{7}.$$

Bildet $(\mathbb{Q}[\sqrt{7}], \oplus, \otimes)$ einen Körper?

Hinweis: Eine Möglichkeit diese Aufgabe zu erledigen besteht im Nachprüfen aller 9 Körperaxiome a la Beispiel 5.4.16. Wenn Ihnen dies zu langweilig weil langwierig erscheint können Sie

- (a) einen “educated guess“ abgeben und einige der schwierigeren (welche sind das?) Axiome nachrechnen oder
- (b) einen gänzlich anderen Weg einschlagen. Zu diesem Zweck schlagen Sie Proposition 5.4.15 nach und...

24. \mathbb{Z}_3 . Stellen Sie die beiden Verknüpfungstabellen (bzgl. $+$ und \cdot) von \mathbb{Z}_3 auf. Welche algebraische Struktur sehen Sie vor sich?

25. \mathbb{Z}_4 . Stellen Sie die beiden Verknüpfungstabellen (bzgl. $+$ und \cdot) für \mathbb{Z}_4 auf und vergleichen Sie diese mit derjenigen von \mathbb{Z}_3 . Welche algebraische Struktur liegt vor? Sind \mathbb{Z}_3 und \mathbb{Z}_4 als Ringe isomorph?

26. *Explizites Rechnen mit Restklassen*

- (a) Stellen Sie fest, ob die angegebenen Zahlen in der selben Restklasse modulo m liegen:

- | | |
|----------------------|-------------------------|
| (i) 2, 12, $m = 2$ | (iv) -111, -29, $m = 7$ |
| (ii) 8, 302, $m = 3$ | (v) -1, -18, $m = 5$ |
| (iii) 2, 12, $m = 6$ | (vi) -59, -91, $m = 8$ |

- (b) Berechnen Sie (a) die kleinste natürliche Zahl x und (b) die größte negative ganze Zahl x für die gilt:

- | | |
|------------------------------------|---|
| (i) $x \equiv 25 \pmod{7}$ | (iii) $x \equiv (25 \cdot 30) \pmod{5}$ |
| (ii) $x \equiv (25 + 39) \pmod{7}$ | (iv) $x \equiv 25^2 \pmod{7}$ |

- (c) Berechnen Sie modulo 3 und modulo 4:

- | | |
|---------------------------|------------------------------|
| (i) $\bar{2} + \bar{3}$ | (iv) $\bar{2} \cdot \bar{2}$ |
| (ii) $\bar{1} - \bar{2}$ | (v) $\bar{2} \cdot \bar{3}$ |
| (iii) $\bar{2} - \bar{3}$ | (vi) $\bar{2} \cdot \bar{4}$ |

Analytische Geometrie

27. *Geraden in der Ebene 1.* Seien $P = (-1, 4)$ und $Q = (2, 10)$.
- Untersuchen Sie, ob die Punkte $R = (-4, -2)$, $S = (1, 8)$ und $T = (4, 7)$ jeweils auf der Strecke \overline{PQ} , der Halbgeraden $s_{P:Q}$ bzw. auf der Geraden $g_{P:Q}$ liegen.
 - Machen Sie eine Skizze, um die Lagebeziehungen auch zeichnerisch zu überprüfen.
 - Wie verändern sich die Lagebeziehungen, wenn man \overline{QP} , $s_{Q:P}$ und $g_{Q:P}$ betrachtet?
28. *Geraden in der Ebene 1.* Wie ist jeweils die Lagebeziehung der folgenden Paare von Geraden? Falls die Geraden einander schneiden, bestimmen Sie den Schnittpunkt. Untersuchen Sie rechnerisch und zeichnerisch.
- g_{Cx} und $g_{D:E}$ mit $C = (1, 3)$, $x = (-1, 3)$, $D = (0, 6)$ und $E = (1, 5)$.
 - $g_{P:Q}$ und g_{Rv} mit $P = (1, 1)$, $Q = (4, -1)$, $R = (2, 6)$ und $v = (1, 5)$.
29. *Geraden im Raum.* Überprüfen Sie jeweils die Lagebeziehung der folgenden Paare von Geraden:
- $g : X = (2, -1, 5) + t(1, 4, -4)$ und $g_{R:S}$ mit $R = (2, 3, 3)$ und $S = (6, 11, -9)$.
 - g_{Pv} und g_{Qw} für $P = (1, 2, -1)$, $Q = (1, -1, 3)$, $v = (1, 3, 2)$ und $w = (1, 3, 0)$
30. *Abstand 1.* Gegeben seien der Punkt $P = (5, 4, 3)$ und die Gerade g_{Xv} mit $X = (9, 1, 3)$ und $v = (3, 4, -5)$ im Raum.
- Bestimmen Sie die Gleichung der Normalebene ε auf g_{Xv} durch P .
 - Berechnen Sie den Schnittpunkt von ε mit g .
 - Berechnen Sie den Normalabstand des Punktes P von der Geraden g_{Xv} .
31. *Abstand 2.* Zeigen Sie, dass die Geraden g_{Pv} und g_{Qw} mit $P = (1, 2, 3)$, $v = (0, -1, 1)$, $Q = (3, 2, 1)$ und $w = (1, 0, 1)$ windschief sind und berechnen Sie ihren Abstand.
32. *Ebenen im Raum.* Gegeben sind die Ebenen:
- ε_{Qrs} und $\varepsilon_{Pt w}$ mit $Q = (3, 1, 4)$, $P = (-1, 2, 1)$, $r = (1, 1, 1)$, $s = (-1, 1, 2)$, $t = (5, -1, -4)$ und $w = (0, 2, 3)$
 - $\varepsilon_{A:B:C}$ und ε_{Duv} mit $A = (3, 4, -2)$, $B = (2, 1, -1)$, $C = (1, 4, 0)$, $D = (4, 5, 1)$, $u = (1, 1, 1)$ und $v = (1, 1, 0)$

Überprüfen Sie jeweils die Lagebeziehungen der Ebenen. Falls sie einander schneiden, bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der Schnittgeraden.

33. *Lineares Gleichungssystem über \mathbb{C} .* Lösen Sie folgendes Gleichungssystem über dem Körper der komplexen Zahlen:

$$\frac{1}{i}x + (1 + i)y = 0$$

$$2x - (1 - i)y = 2$$