

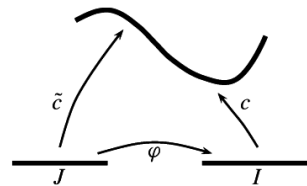
# Kurven im $\mathbb{R}^n$

## Reguläre Kurve:

**Definition 2.1.1.** Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall. Eine *parametrisierte Kurve* ist eine unendlich oft differenzierbare Abbildung  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Eine parametrisierte Kurve heißt *regulär*, falls ihr Geschwindigkeitsvektor nirgends verschwindet,  $\dot{c}(t) \neq 0$  für alle  $t \in I$ .

## Parametertransformation & Umparametrisierung:

**Definition 2.1.7.** Sei  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine parametrisierte Kurve. Eine *Parametertransformation* von  $c$  ist eine bijektive Abbildung  $\varphi : J \rightarrow I$ , wobei  $J \subset \mathbb{R}$  ein weiteres Intervall ist, so dass sowohl  $\varphi$  als auch  $\varphi^{-1} : I \rightarrow J$  unendlich oft differenzierbar sind. Die parametrisierte Kurve  $\tilde{c} = c \circ \varphi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt *Umparametrisierung* von  $c$ .



Orientierungserhaltend:  $\varphi'(t) > 0$

Orientierungsumkehrend:  $\varphi'(t) < 0$

## Kurve:

**Definition 2.1.9.** Eine *Kurve* ist eine Äquivalenzklasse von regulären parametrisierten Kurven, wobei diese als äquivalent angesehen werden, wenn sie Umparametrisierungen voneinander sind.

Alle Parametrisierungen können somit zu einer Kurve zusammengefasst werden.

## Orientierte Kurve:

**Definition 2.1.10.** Eine *orientierte Kurve* ist eine Äquivalenzklasse von parametrisierten Kurven, wobei diese als äquivalent angesehen werden, wenn sie durch *orientierungserhaltende* Parametertransformationen auseinander hervorgehen.

Bemerkung: Jede orientierte Kurve bestimmt genau 1 Kurve. Jede Kurve hat genau 2 verschiedene Orientierungen, das heißt es gibt immer 2 orientierte Kurven, die die Kurve bestimmen

## Nach Bogenlänge parametrisierte Kurve:

**Definition 2.1.11.** Eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve ist eine reguläre parametrisierte Kurve  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $\|\dot{c}(t)\| = 1$  für alle  $t \in I$ .

Nach Bogenlänge parametrisierte Kurven haben also die Eigenschaft, ihr Bild mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen, und zwar genau mit Geschwindigkeit 1.

## Länge von Kurven:

**Definition 2.1.15.** Sei  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine parametrisierte Kurve. Dann heißt

$$L[c] := \int_a^b \|\dot{c}(t)\| dt$$

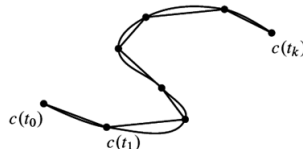
Länge von  $c$ .

Die Länge parametrisierter Kurven ändert sich nicht bei Umparametrisieren!

## Polygone:

**Definition 2.1.17.** Ein Polygon im  $\mathbb{R}^n$  ist ein Tupel  $P = (a_0, \dots, a_k)$  von Vektoren  $a_i \in \mathbb{R}^n$ , so dass  $a_{i+1} \neq a_i$  für alle  $i = 0, \dots, k-1$ .

Polygon entlang einer Kurve:



## Periodizität:

**Definition 2.1.19.** Eine parametrisierte Kurve  $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt *periodisch mit Periode  $L$* , falls für alle  $t \in \mathbb{R}$  gilt  $c(t+L) = c(t)$ ,  $L > 0$ , und es kein  $0 < L' < L$  gibt, so dass ebenfalls  $c(t+L') = c(t)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Eine Kurve heißt *geschlossen*, falls sie eine periodische reguläre Parametrisierung besitzt.

## Geschlossene Kurven:

**Definition 2.1.20.** Eine geschlossene Kurve heißt *einfach geschlossen*, falls sie eine periodische reguläre Parametrisierung  $c$  mit Periode  $L$  hat, so dass  $c|_{[0,L)}$  injektiv ist.

## Literatur:

Bär, C. (2010). *Elementare Differentialgeometrie*. (2. Auflage). Berlin/New York: De Gruyter