Einige Klassen von Flächen

Bernhard Steiner
Markus Rymarz

250054 Seminar für LAK (Analysis) – WiSe 2014/15 – ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Steinbauer

Aufbau der Präsentation:

- Minimalflächen
- Regelflächen
- Drehflächen
- Röhrenflächen

Minimalflächen

Joseph-Louis Lagrange (1736-1813):

Gibt es zu einer gegebenen geschlossenen Kurve in $\mathbb{R}^3$ *eine Fläche* $S \subseteq \mathbb{R}^3$, *welche von der Kurve berandet wird und unter allen solchen Flächen kleinsten Inhalt hat?*

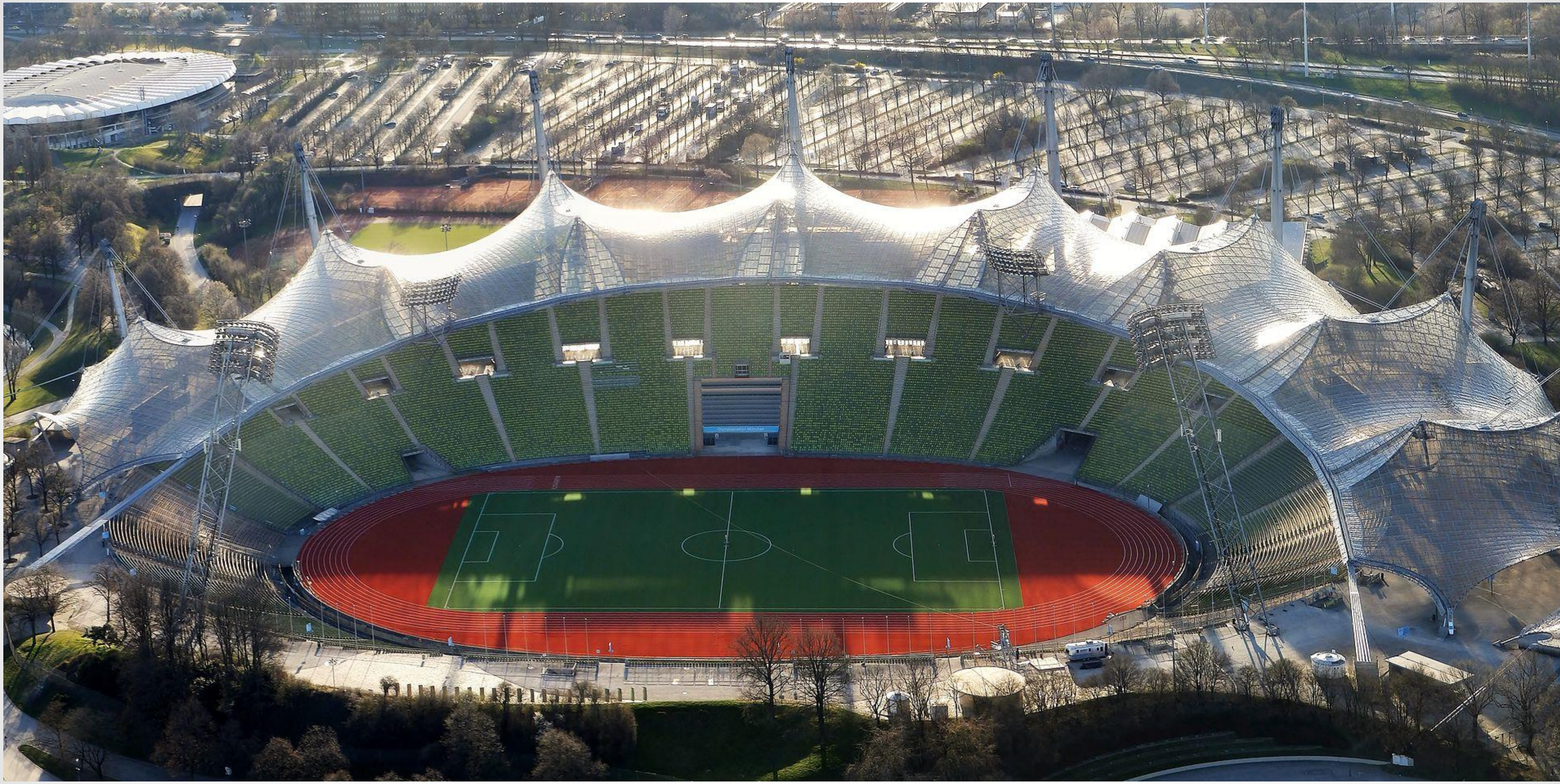
Joseph Antoine Ferdinand Plateau (1801-1883):

- Experimente

Jesse Douglas (1897-1965); Tibor Radó (1895-1965):

- Allgemein gültiger Existenzbeweis

Münchner Olympiastadion:



<http://de.wikipedia.org/wiki/Olympiastadion_M%C3%BCnchen#mediaviewer/File:2014_Olympiastadion_Munich.jpg>

Urban Loritz-Platz:

<http://www.tw-arch.at/index.php?id=36>

Korollar 3.8.9. *Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche mit kompaktem Abschluss $\overline{S}$. Wir nehmen an, dass S minimalen Flächeninhalt hat unter allen regulären Flächen $\tilde{S}$ mit demselben Rand $\partial\tilde{S} = \partial S$.*

Dann gilt für das mittlere Krümmungsfeld $\mathcal{H}$ von S

$$\mathcal{H} \equiv (0,0,0)^\top.$$

Definition 3.6.9.: Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine orientierte reguläre Fläche, sei $p \in S$ ein Punkt. Seien κ_1 und κ_2 die Hauptkrümmung von S in p. Dann ist

$$K(P) := \kappa_1 \cdot \kappa_2 = det(W_p)$$

die *Gauß-Krümmung* von S in p. Ferner heißt

$$H(p) := \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = \tfrac{1}{2} Spur(W_p)$$

mittlere Krümmung von S in p.

Das mittlere Krümmungsfeld $\mathcal{H}$ ist definiert durch $\mathcal{H} := H \cdot N$, wobei N das Normalenfeld ist.

Korollar 3.8.9.: *Sei* $S \subseteq \mathbb{R}^3$ *eine reguläre Fläche mit kompaktem Abschluss* $\overline{S}$*. Wir nehmen an, dass* S *minimalen Flächeninhalt hat unter allen regulären Flächen* $\tilde{S}$ *mit demselben Rand* $\partial\tilde{S} = \partial S$*.*

Dann gilt für das mittlere Krümmungsfeld $\mathcal{H}$ *von* S

$$\mathcal{H} \equiv (0, 0, 0)^\top.$$

Definition 3.8.10. *Eine reguläre Fläche $S \subseteq \mathbb{R}^3$ heißt Minimalfläche, falls*

$$\mathcal{H} \equiv (0, 0, 0)^\top.$$

Bemerkungen:

- Minimalflächen müssen nicht unbedingt flächenminimierend sein. Es handelt sich bei $\mathcal{H} \equiv (0,0,0)^\top$ nur um eine notwendige Bedingung!

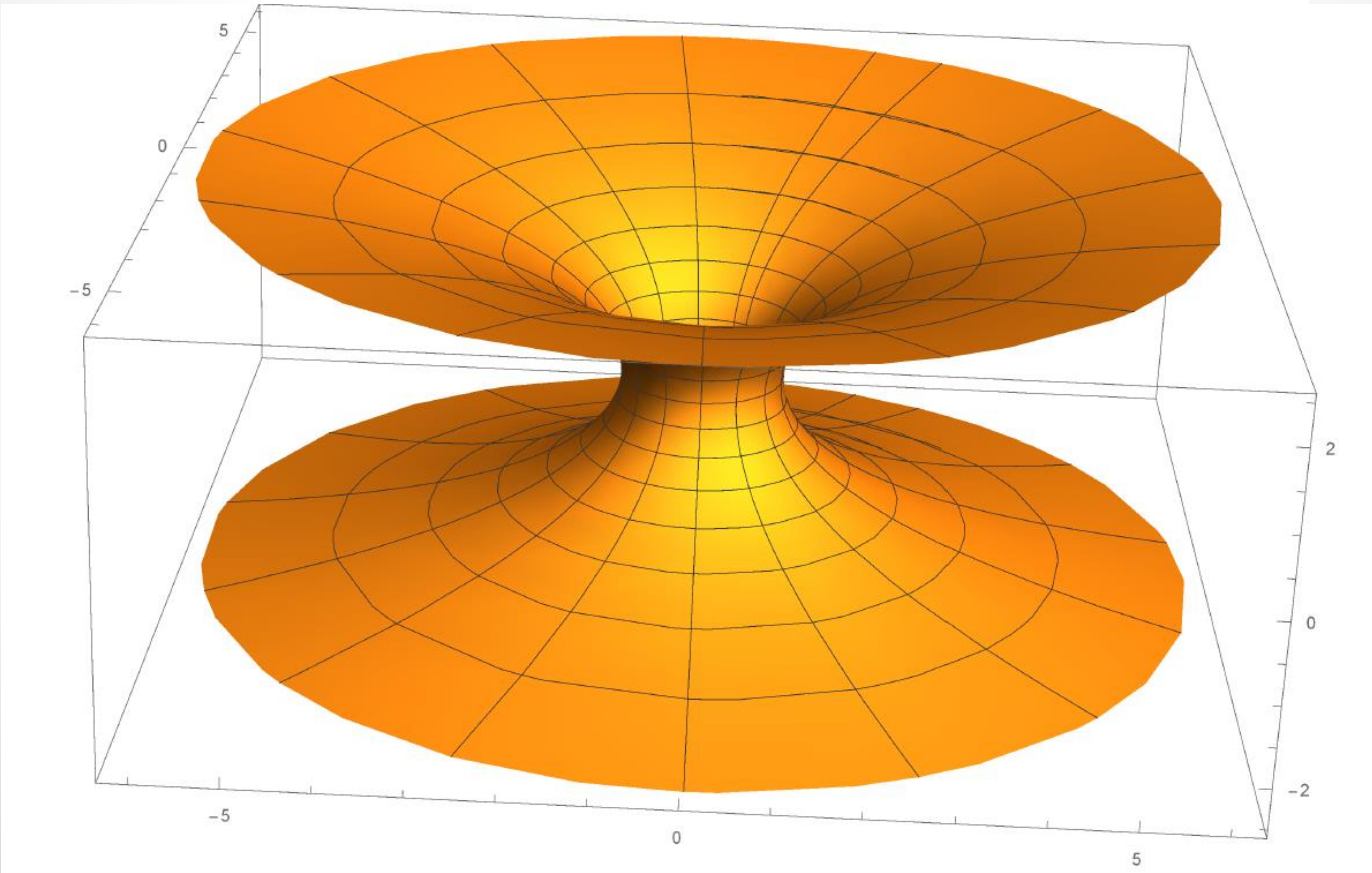
- Ist die Fläche S orientierbar, so gibt es ein glattes Einheitsnormalenfeld N auf S. Dann gilt außerdem für das mittlere Krümmungsfeld auch: $\mathcal{H} = H \cdot N$. Die Minimalflächenbedingung lautet dann aber $H \equiv 0$.

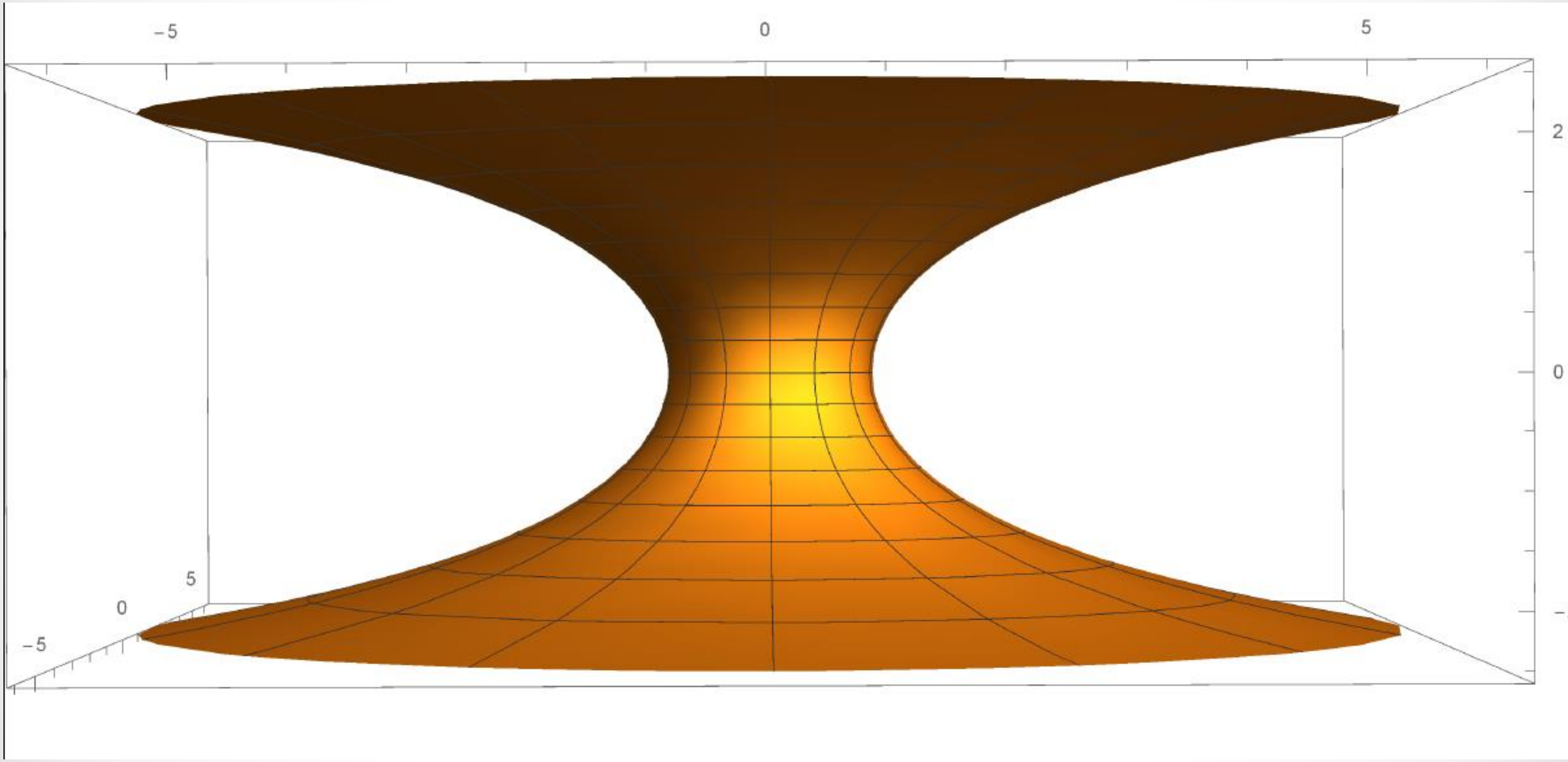
Beispiele

Kettenfläche (Katenoid):

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

$$F(u^1, u^2) = \begin{pmatrix} \cosh(u^1)\cos(u^2) \\ \cosh(u^1)\sin(u^2) \\ u^1 \end{pmatrix}$$



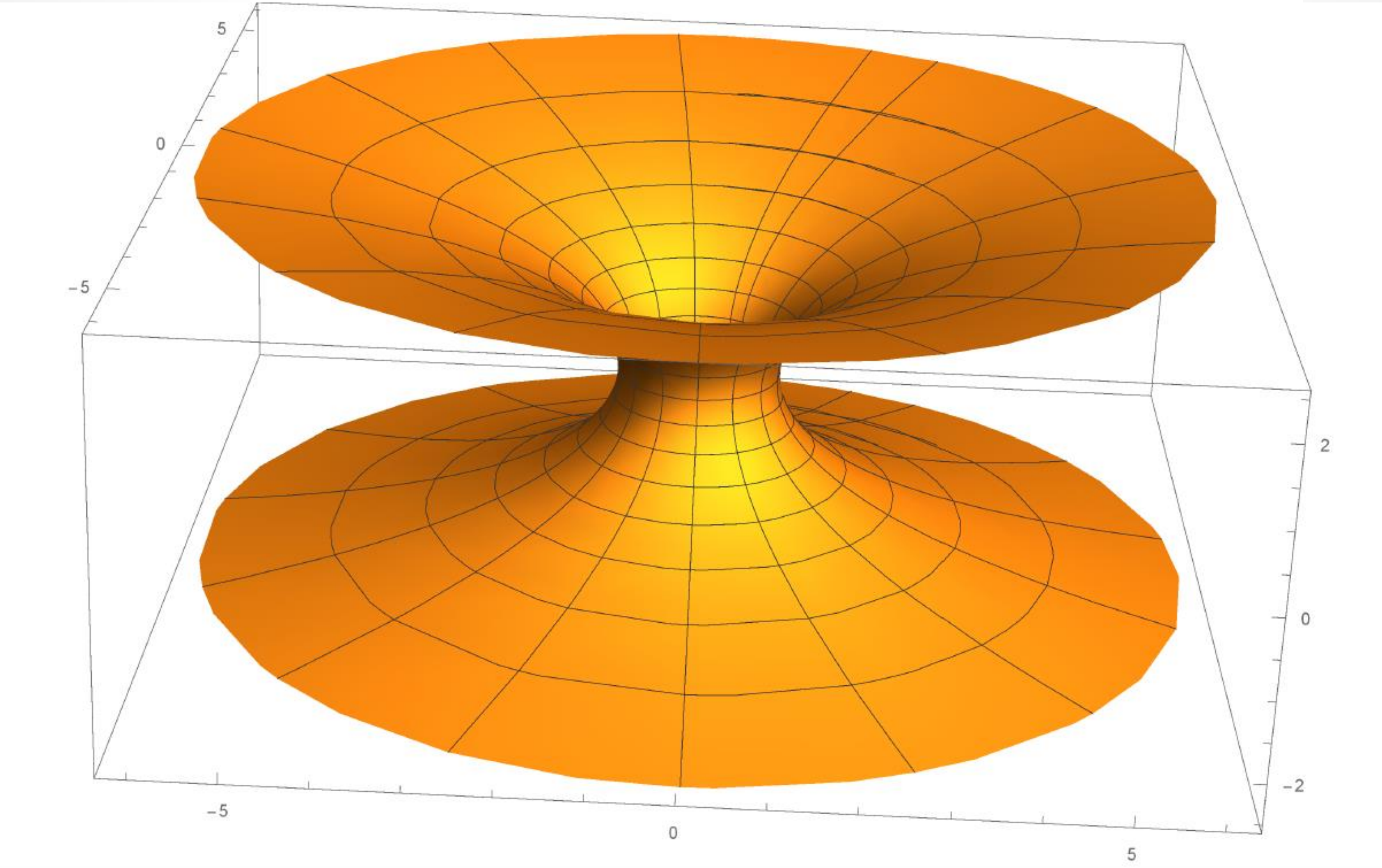


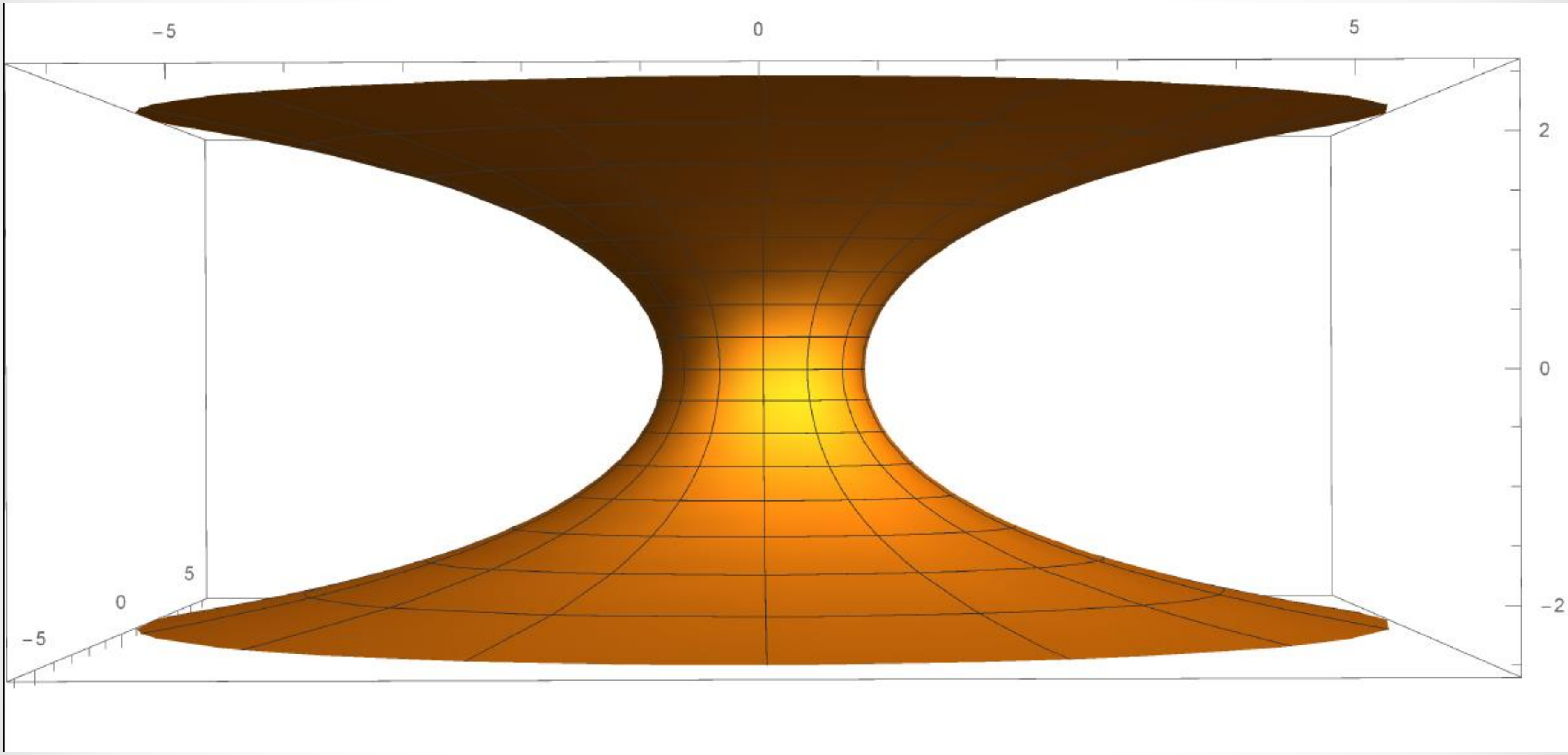
−5
0
5
2
0
−2
5
0
−5

Kettenfläche (Katenoid):

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

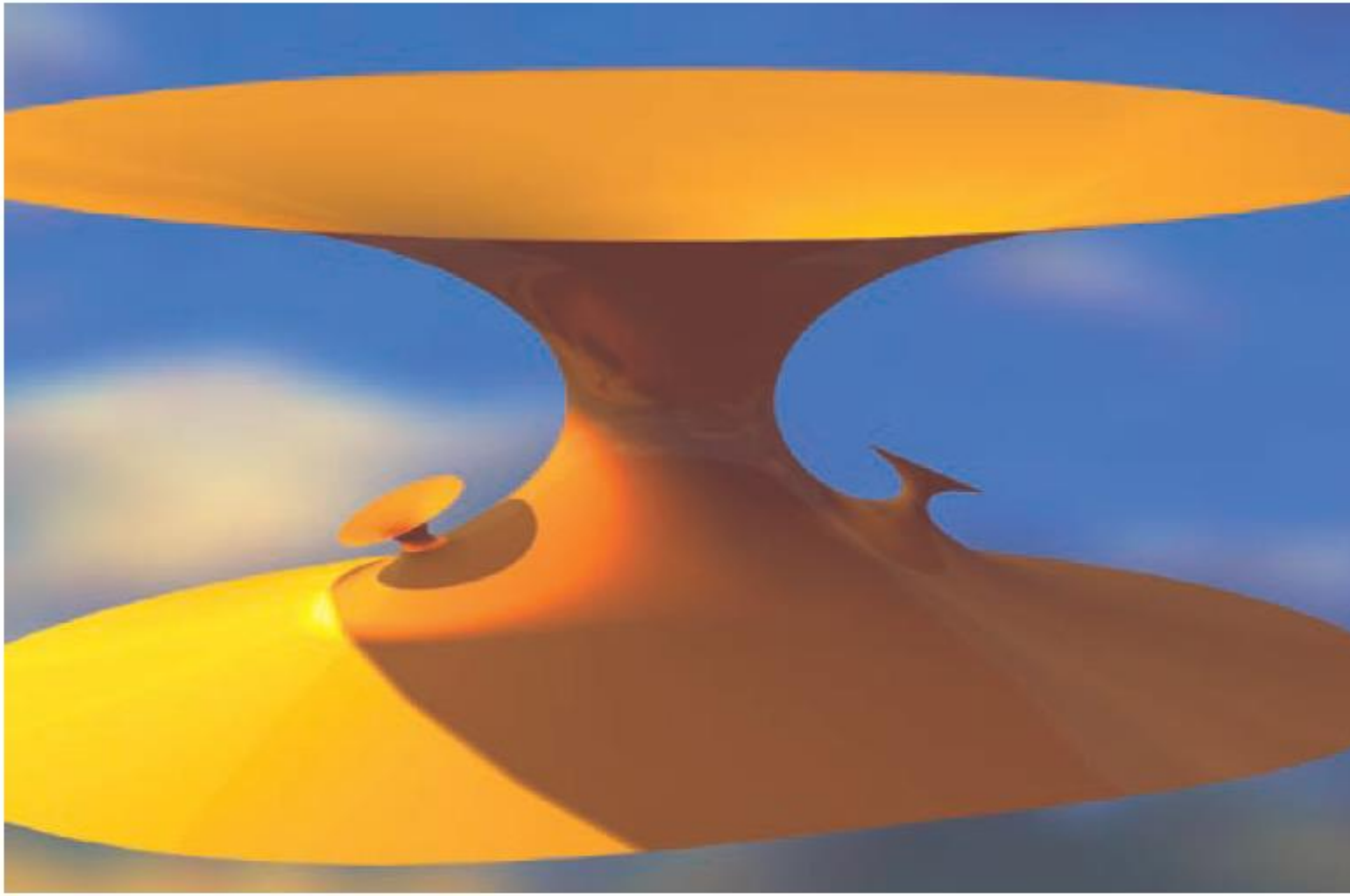
$$F(u^1, u^2) = \begin{pmatrix} \cosh(u^1)\cos(u^2) \\ \cosh(u^1)\sin(u^2) \\ u^1 \end{pmatrix}$$





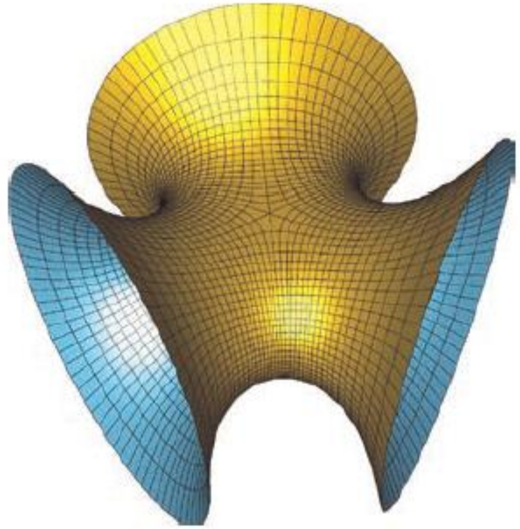
−5
0
5
2
0
−2
5
0
−5

Variationsreichtum des Katenoids:

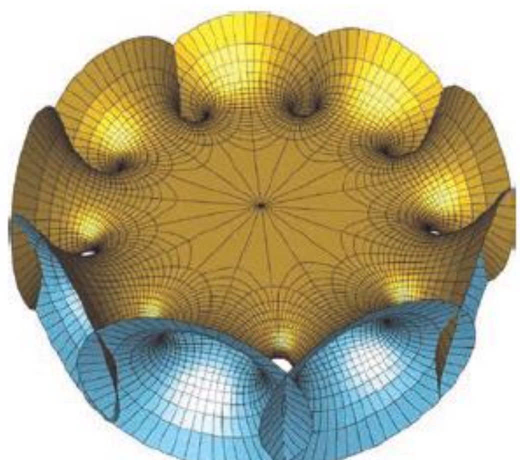


Bidenoid-Fläche von Karcher

<http://www.bilder-der-mathematik.de/picturebook/pages/picturebook_pages_154_155.pdf>



Jorge-Meeks Trinoid (oben) und
9-noid (unten)

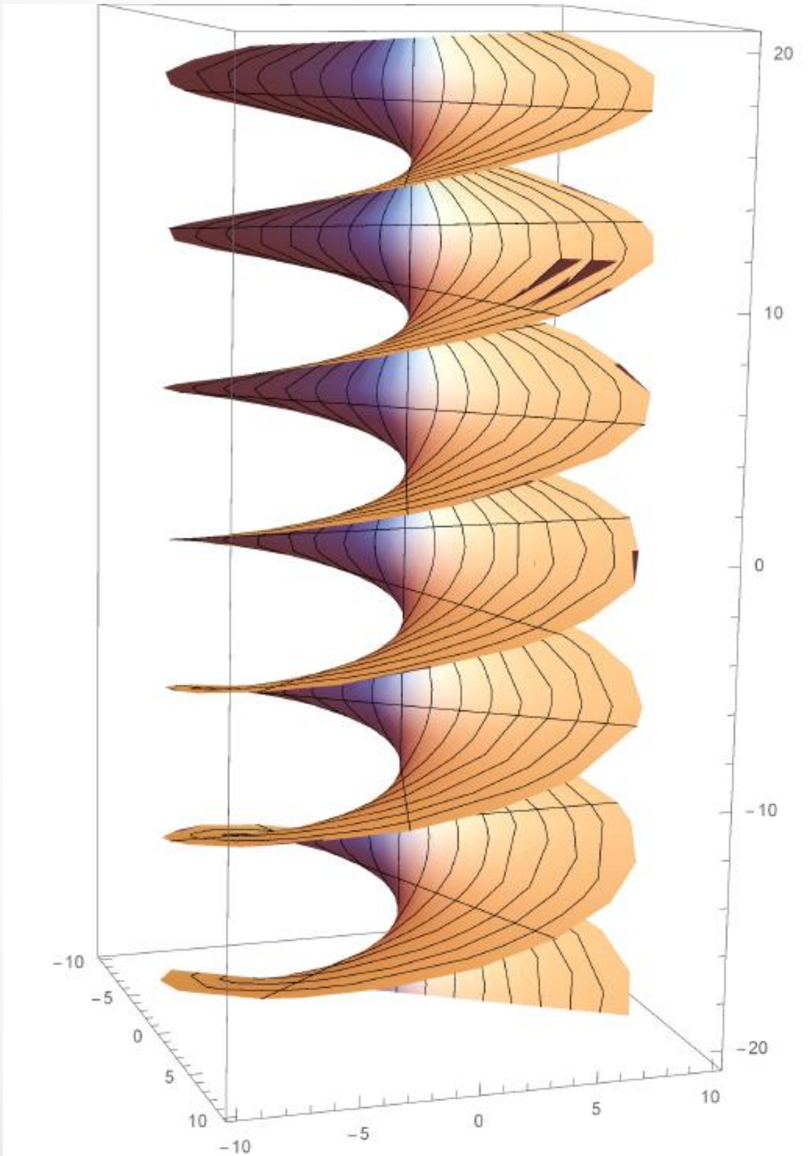


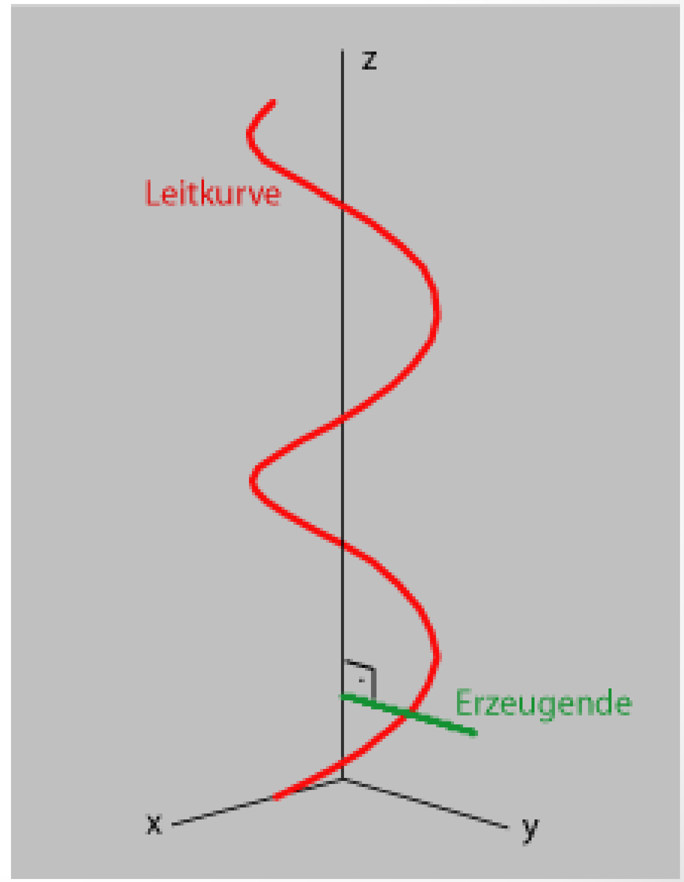
<http://www.bilder-der-mathematik.de/picturebook/pages/picturebook_pages_154_155.pdf>

Wendelfläche (Helikoid):

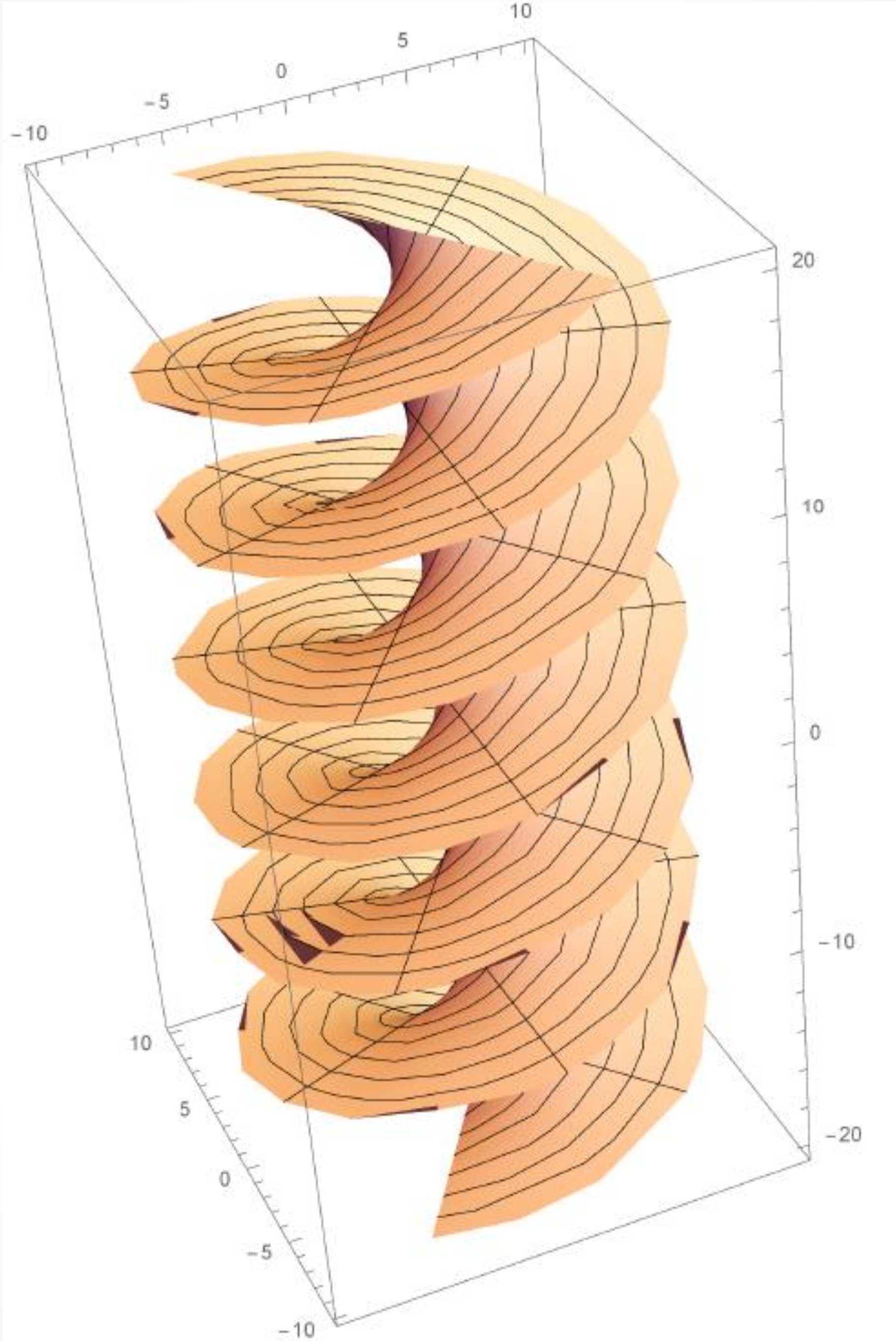
$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

$$F(u^1, u^2) = \begin{pmatrix} u^1 \sin(u^2) \\ -u^1 \cos(u^2) \\ u^2 \end{pmatrix}$$

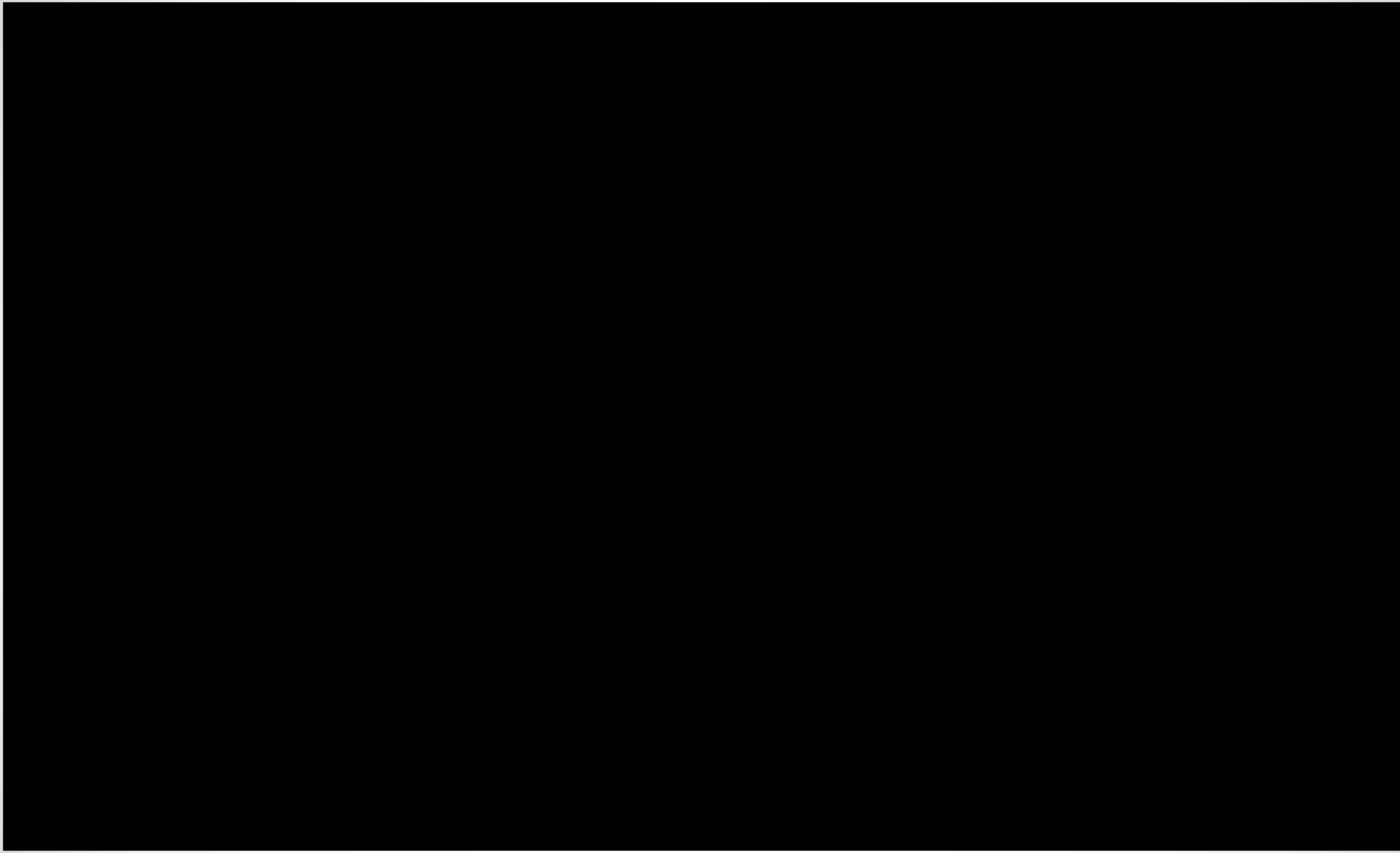




<http://www.math.tu-dresden.de/~nestler/diffgeo/regelfl/wendel.html>



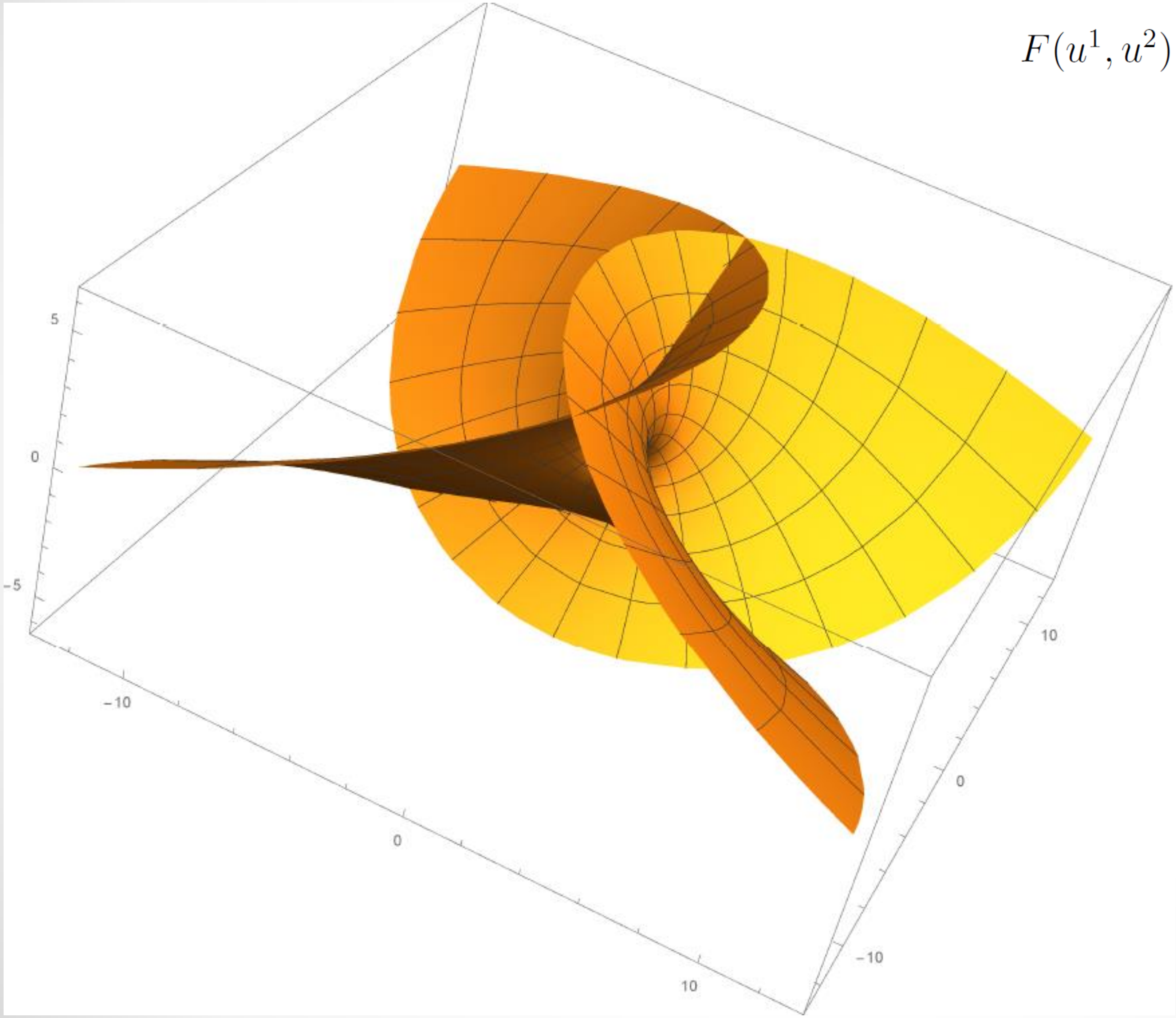
-10
-5
0
5
10
20
10
0
-10
-20
10
5
0
-5
-10

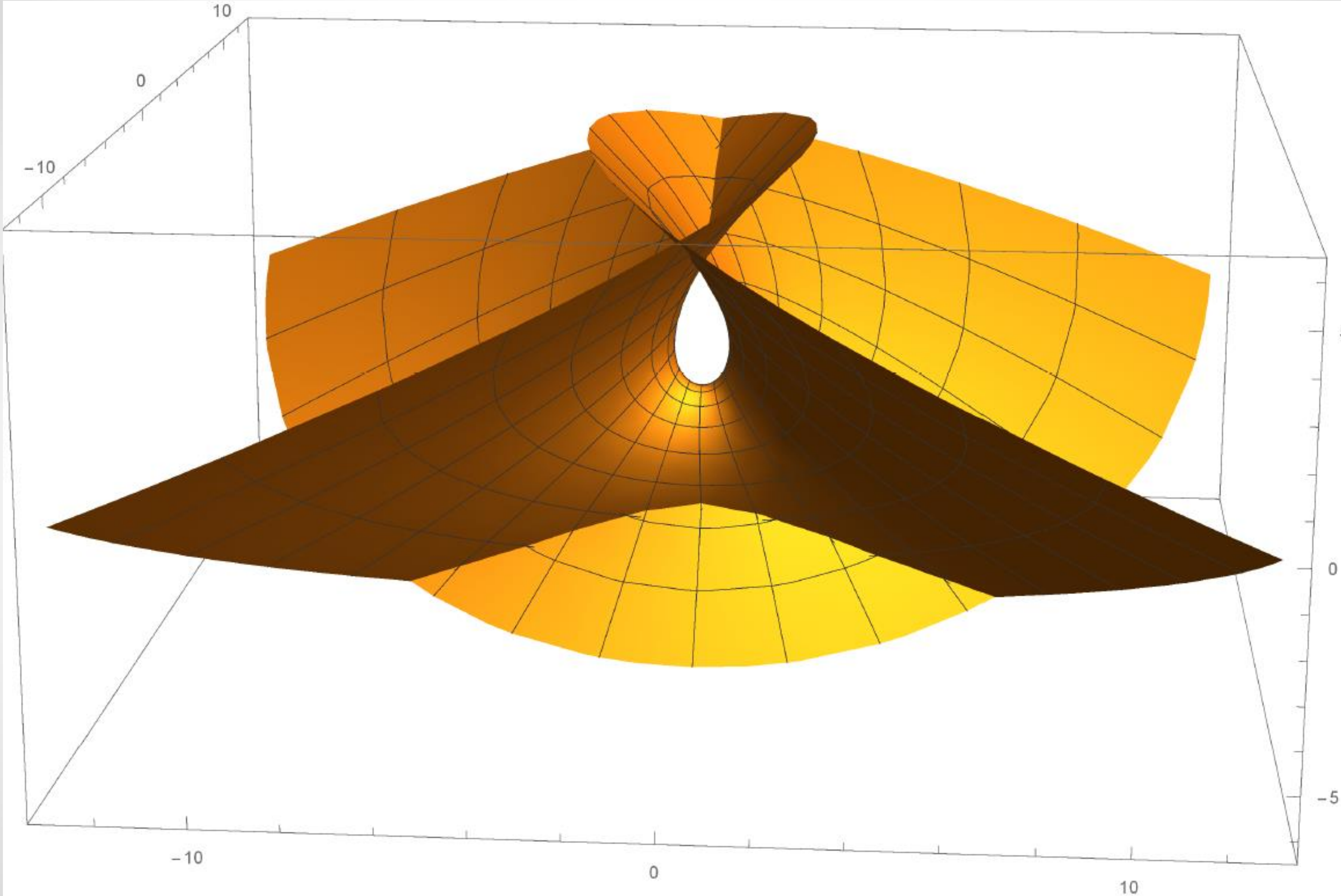


Enneper-Fläche:

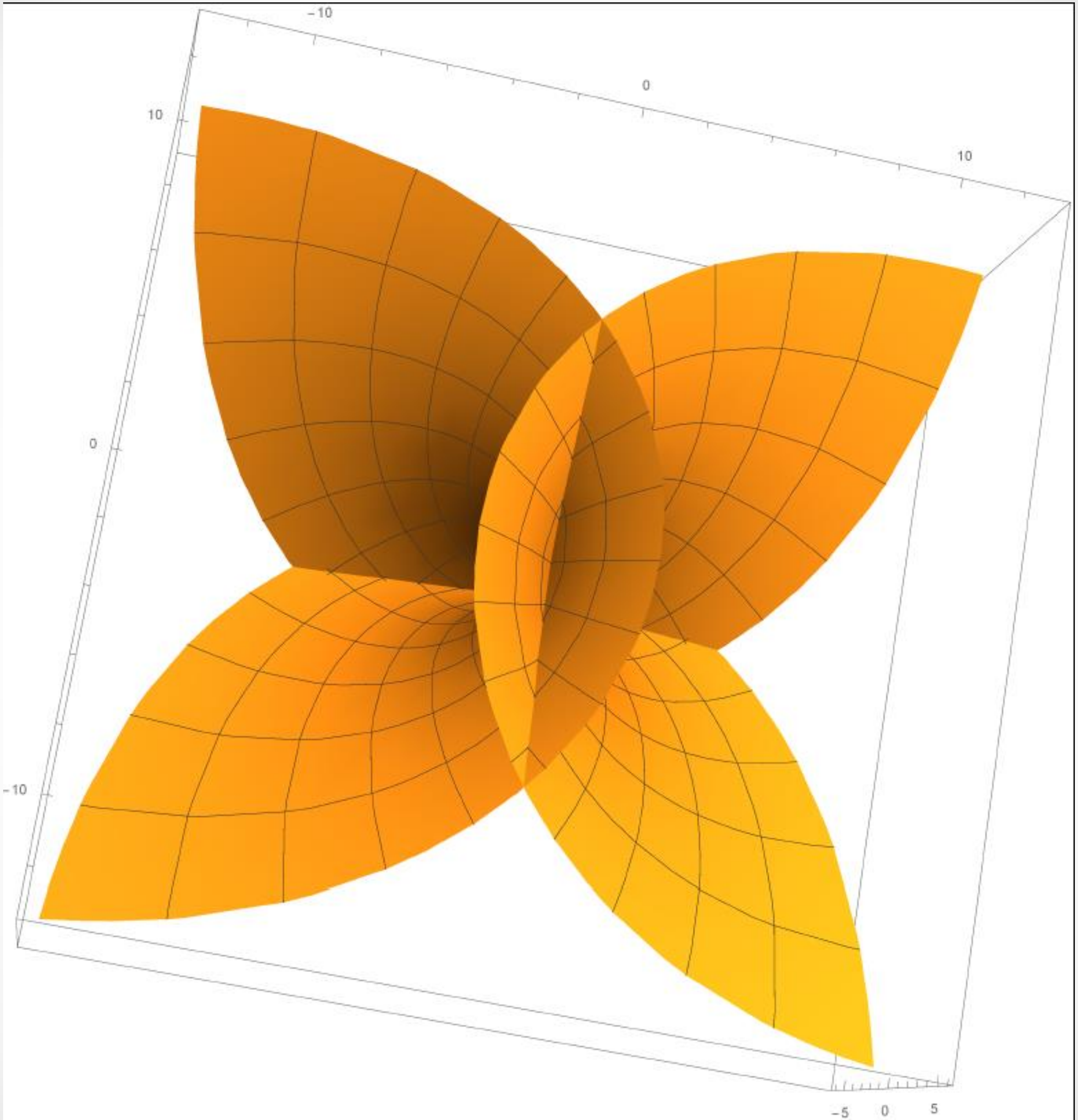
$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

$$F(u^1, u^2) = \begin{pmatrix} u^1 - \dfrac{(u^1)^3}{3} + u^1(u^2)^2 \\[2ex] u^2 - \dfrac{(u^2)^3}{3} + u^2(u^1)^2 \\[2ex] (u^1)^2 - (u^2)^2 \end{pmatrix}$$





10
0
−10
5
0
−5
−10
0
10


-10
0
10
10
0
-10
-5
0
5

Satz 3.8.15. *Für jede reguläre Fläche gilt*

$$K \leq H^2.$$

Insbesondere gilt für die Gaußkrümmung von Minimalflächen

$$K \leq 0.$$

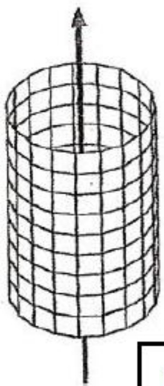
Korollar 3.8.16. *Es gibt keine kompakten Minimalflächen.*

Satz 3.6.17.: Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine kompakte nicht leere reguläre Fläche. Dann besitzt S einen Punkt p mit $K(p) > 0$.

Drehflächen

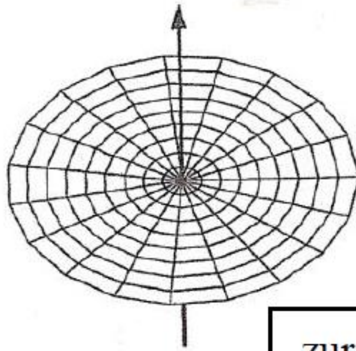
Eine Drehfläche entsteht, falls eine ebene Kurve, welche beispielsweise in der x-z-Achse liegt, um die z-Achse rotiert. Lässt sich die ebene Kurve durch die Parametrisierung $t \mapsto (r(t), t)^\top$, $t \in I$ beschreiben, so erhält man eine lokale Parametrisierung der zugehörigen Drehfläche durch

$$F(t, \varphi) = \begin{pmatrix} r(t)\cos(\varphi) \\ r(t)\sin(\varphi) \\ t \end{pmatrix}, \qquad t \in I, \varphi \in (\varphi_0, \varphi_0 + 2\pi).$$

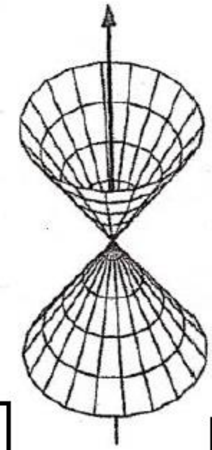


Kreiszylinder

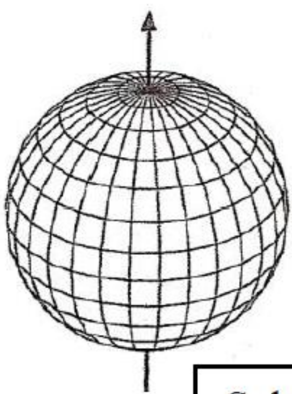
r=b falls a= 0



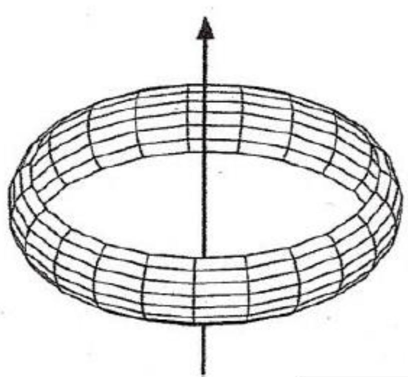
zur Drehachse
orthogonale Ebene
(falls $|a| = 1$)



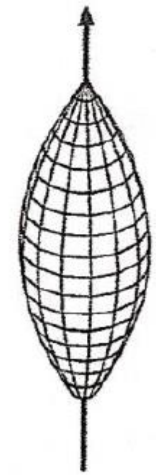
doppelter
Kreiskegel
($0 < |a| < 1$)



Sphäre
($a^2K = 1$)

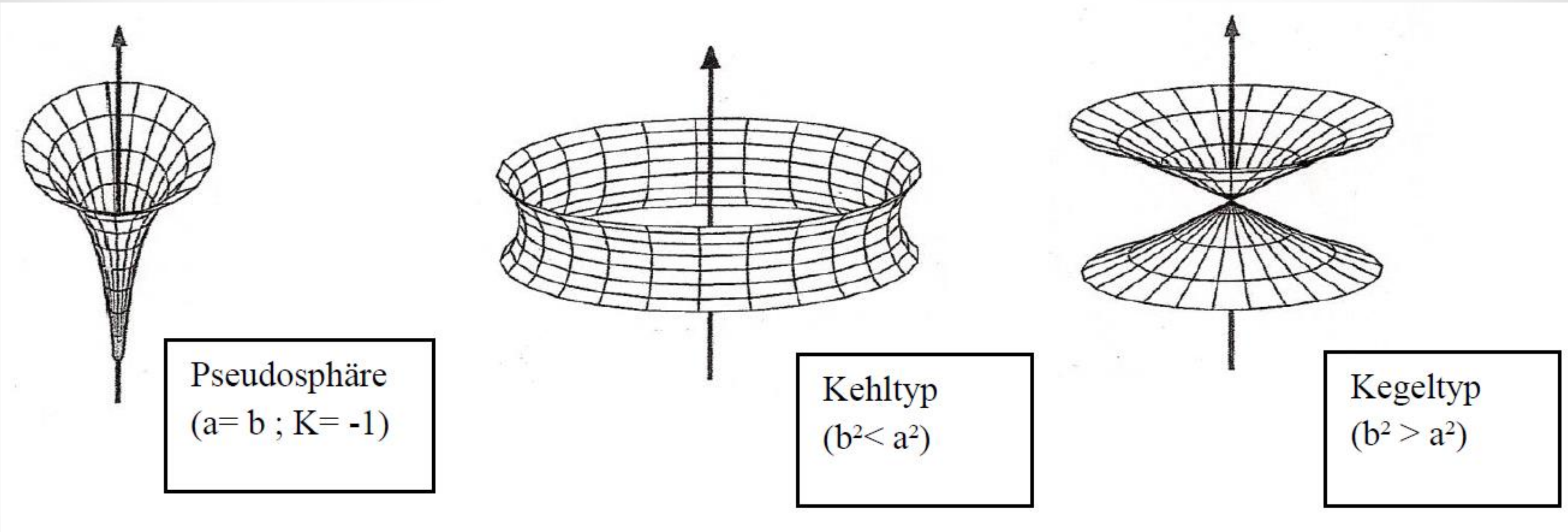


Wulsttyp
($a^2K > 1$)



Spindeltyp
($0 < a^2 K < 1$)

<http://www.math.uni-leipzig.de/~rademacher/Vortrag6.pdf>



<http://www.math.uni-leipzig.de/~rademacher/Vortrag6.pdf>

Eine Drehfläche entsteht, falls eine ebene Kurve, welche beispielsweise in der x-z-Achse liegt, um die z-Achse rotiert. Lässt sich die ebene Kurve durch die Parametrisierung $t \mapsto (r(t), t)^\top$, $t \in I$ beschreiben, so erhält man eine lokale Parametrisierung der zugehörigen Drehfläche durch

$$F(t, \varphi) = \begin{pmatrix} r(t)\cos(\varphi) \\ r(t)\sin(\varphi) \\ t \end{pmatrix}, \qquad t \in I, \varphi \in (\varphi_0, \varphi_0 + 2\pi).$$

Danke!