Innere Geometrie II

Die kovariante Ableitung

Harald Kittinger und Andreas Wiederin

Vortrag im Seminar Analysis für LAK

Universität Wien, 2015

Definition: Orthogonalprojektion

Die **Orthogonalprojektion** Π_p ist definiert als Abbildung

$$\Pi_p : \mathbb{R}^3 \rightarrow T_pS$$

$$X \rightarrow X - \langle X, N(p) \rangle \cdot N(p)$$

Definition: Orthogonalprojektion

Die **Orthogonalprojektion** Π_p ist definiert als Abbildung

$$\Pi_p : \mathbb{R}^3 \to T_pS$$

$$X \to X - \langle X, N(p) \rangle \cdot N(p)$$

.

Definition: kovariante Ableitung auf Kurven

Die **kovariante Ableitung eines Vektorfeldes** v über einer Kurve c ist definiert als

$$\frac{\nabla}{dt} v(t) := \Pi_{c(t)}(\dot{v}(t))$$
$$= \dot{v}(t) - \langle \dot{v}(t), N(p) \rangle \cdot N(p)$$

Die Komponente von $\dot{v}$ in Richtung $N(p)$ wird abgezogen, übrig bleibt nur der Teil innerhalb von T_pS!

Definition: kovariante Ableitung auf Kurven

Die **kovariante Ableitung eines Vektorfeldes** v über einer Kurve c ist definiert als

$$\frac{\nabla}{dt} v(t) := \Pi_{c(t)}(\dot{v}(t))$$
$$= \dot{v}(t) - \langle \dot{v}(t), N(p) \rangle \cdot N(p)$$

Die Komponente von $\dot{v}$ in Richtung $N(p)$ wird abgezogen, übrig bleibt nur der Teil innerhalb von T_pS!

Definition: kovariante Ableitung auf Kurven

Die **kovariante Ableitung eines Vektorfeldes** v über einer Kurve c ist definiert als

$$\frac{\nabla}{dt}v(t) := \Pi_{c(t)}(\dot{v}(t))$$
$$= \dot{v}(t) - \langle \dot{v}(t), N(p) \rangle \cdot N(p)$$

Die Komponente von $\dot{v}$ in Richtung $N(p)$ wird abgezogen, übrig bleibt nur der Teil innerhalb von T_pS!

Ausblick Geodäten

Verschwindet die kovariante Ableitung des Geschwindigkeitsvektors einer Kurve c, d.h.

$$\frac{\nabla}{dt}\dot{c} = 0$$

also ist c ohne Beschleunigung im kovarianten Sinn, dann ist c eine **Geodäte**.

Diese sind minimal gekrümmt und bilden (lokal) die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten auf S.

Sie ersetzen dadurch die Geraden im $\mathbb{R}^n$!

Ausblick Geodäten

Verschwindet die kovariante Ableitung des Geschwindigkeitsvektors einer Kurve c, d.h.

$$\frac{\nabla}{dt}\dot{c} = 0$$

also ist c ohne Beschleunigung im kovarianten Sinn, dann ist c eine **Geodäte**.
Diese sind minimal gekrümmt und bilden (lokal) die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten auf S.
Sie ersetzen dadurch die Geraden im $\mathbb{R}^n$!

Ausblick Geodäten

Verschwindet die kovariante Ableitung des Geschwindigkeitsvektors einer Kurve c, d.h.

$$\frac{\nabla}{dt}\dot{c} = 0$$

also ist c ohne Beschleunigung im kovarianten Sinn, dann ist c eine **Geodäte**.
Diese sind minimal gekrümmt und bilden (lokal) die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten auf S.
Sie ersetzen dadurch die Geraden im $\mathbb{R}^n$!

1. Die kovariante Ableitung
   - Die kovariante Ableitung von Vektorfeldern über Kurven
   - Die kovariante Ableitung von Vektorfeldern auf regulären Flächen
   - Die kovariante Ableitung als Größe der inneren Geometrie

Motivation

Sei nun $v : S \to \mathbb{R}^3$, $v(p) \in T_pS$, also ein Vektorfeld. Um hier zur kov. Ableitung zu gelangen muss noch die Richtung festgelegt werden, in die Abgeleitet wird.
Bisher war diese durch die Kurve (also $\dot{c}$) gegeben, nun brauchen wir ein weiteres Vektorfeld ω auf S

Um auf die vorige Konstruktion aufbauen zu können verwenden wir eine Kurve auf S und d_pf für VF längs Kurven.

Motivation

Sei nun $v : S \to \mathbb{R}^3$, $v(p) \in T_pS$, also ein Vektorfeld. Um hier zur kov. Ableitung zu gelangen muss noch die Richtung festgelegt werden, in die Abgeleitet wird.
Bisher war diese durch die Kurve (also $\dot{c}$) gegeben, nun brauchen wir ein weiteres Vektorfeld ω auf S

Um auf die vorige Konstruktion aufbauen zu können verwenden wir eine Kurve auf S und d_pf für VF längs Kurven.

Motivation

Sei nun $v : S \to \mathbb{R}^3$, $v(p) \in T_pS$, also ein Vektorfeld. Um hier zur kov. Ableitung zu gelangen muss noch die Richtung festgelegt werden, in die Abgeleitet wird.
Bisher war diese durch die Kurve (also $\dot{c}$) gegeben, nun brauchen wir ein weiteres Vektorfeld ω auf S

Um auf die vorige Konstruktion aufbauen zu können verwenden wir eine Kurve auf S und d_pf für VF längs Kurven.

Kovariante Ableitung von Vektorfeldern

Sei also c eine beliebige Kurve mit $c(0) = p$, $\dot{c}(t) = \omega(p)$. Dann ist die kovariante Ableitung definiert als

$$\nabla_{\omega} v(p) := \frac{\nabla}{dt} v \circ c(0)$$

Die Wahl von c ist auch hier egal, da $\nabla_{\omega} v(p)$ nur von $\dot{c}(0) = \omega_p$ abhängt!

Kovariante Ableitung von Vektorfeldern

Sei also c eine beliebige Kurve mit $c(0) = p$, $\dot{c}(t) = \omega(p)$. Dann ist die kovariante Ableitung definiert als

$$\nabla_{\omega v}(p) := \frac{\nabla}{dt} v \circ c(0)$$

Die Wahl von c ist auch hier egal, da $\nabla_{\omega v}(p)$ nur von $\dot{c}(0) = \omega_p$ abhängt!

1. Die kovariante Ableitung
   - Die kovariante Ableitung von Vektorfeldern über Kurven
   - Die kovariante Ableitung von Vektorfeldern auf regulären Flächen
   - Die kovariante Ableitung als Größe der inneren Geometrie

Motivation

Die Kovariante Ableitung besteht per Definition nur aus dem Teil der (regulären $\mathbb{R}^3$) Ableitung der in T_pS liegt, der Normalteil wurde ja entfernt. Damit liegt die Vermutung nahe, dass es sich um eine Größe der inneren Geometrie handelt

Das ist der Fall, kann aber nur mit einigem Aufwand ($\approx$4 Seiten) gezeigt werden. Im folgenden geben wir also nur eine kleine Beweisskizze

Motivation

Die Kovariante Ableitung besteht per Definition nur aus dem Teil der (regulären $\mathbb{R}^3$) Ableitung der in T_pS liegt, der Normalteil wurde ja entfernt. Damit liegt die Vermutung nahe, dass es sich um eine Größe der inneren Geometrie handelt
Das ist der Fall, kann aber nur mit einigem Aufwand ($\approx$4 Seiten) gezeigt werden. Im folgenden geben wir also nur eine kleine Beweisskizze

Ansatz in lokaler Parametrisierung

Seien v, w VF auf S, c eine Kurve mit $c(0) = p$, $\dot{c}(t) = \omega(p)$.
Schreiben v in der Basis $\frac{\partial F}{\partial u^j}$: $\quad v = \sum_{i=1}^{2} \xi^i \frac{\partial F}{\partial u^i}$

weiters $\tilde{v} = v \circ c$ und $\tilde{c} = F^{-1} \circ c$ und $\tilde{\xi}^i = \xi^i(c(t))$

wir wollen $\frac{\nabla}{dt}\tilde{v}(t) = \Pi_{c(t)}(\dot{\tilde{v}}(t))$ berechnen

Ansatz in lokaler Parametrisierung

Seien v, w VF auf S, c eine Kurve mit $c(0) = p$, $\dot{c}(t) = \omega(p)$.
Schreiben v in der Basis $\frac{\partial F}{\partial u^j}$: $\quad v = \sum_{i=1}^{2} \xi^i \frac{\partial F}{\partial u^i}$
weiters $\tilde{v} = v \circ c$ und $\tilde{c} = F^{-1} \circ c$ und $\tilde{\xi}^i = \xi^i(c(t))$

wir wollen $\frac{\nabla}{dt}\tilde{v}(t) = \Pi_{c(t)}(\dot{\tilde{v}}(t))$ berechnen

Ansatz in lokaler Parametrisierung

Seien v, w VF auf S, c eine Kurve mit $c(0) = p$, $\dot{c}(t) = \omega(p)$.
Schreiben v in der Basis $\frac{\partial F}{\partial u^j}$: $v = \sum_{i=1}^{2} \xi^i \frac{\partial F}{\partial u^i}$
weiters $\tilde{v} = v \circ c$ und $\tilde{c} = F^{-1} \circ c$ und $\tilde{\xi}^i = \xi^i(c(t))$

wir wollen $\frac{\nabla}{dt}\tilde{v}(t) = \Pi_{c(t)}(\dot{\tilde{v}}(t))$ berechnen

$\tilde{v}$ und $\dot{\tilde{v}}$ in der lok. Param.

$$\tilde{v}(t) = \sum_{i=1}^{2} \tilde{\xi}^i(t) \frac{\partial F}{\partial u^i}(\tilde{c}(t))$$

$$\dot{\tilde{v}}(t) = \sum_{i=1}^{2} \xi^i\tilde{(}t) \frac{\partial F}{\partial u^l}(\tilde{c}(t)) + \tilde{\xi}^i \sum_{j=1}^{2} \underbrace{\frac{\partial^2 F}{\partial u^j \partial u^j}}_{\text{wichtiger Term}} (\tilde{c}(t))\dot{\tilde{c}}^j(t)$$

$\tilde{v}$ und $\dot{\tilde{v}}$ in der lok. Param.

$$\tilde{v}(t) = \sum_{i=1}^{2} \tilde{\xi}^i(t) \frac{\partial F}{\partial u^i}(\tilde{c}(t))$$

$$\dot{\tilde{v}}(t) = \sum_{i=1}^{2} \xi^i \tilde{(}t) \frac{\partial F}{\partial u^l}(\tilde{c}(t)) + \tilde{\xi}^i \sum_{j=1}^{2} \underbrace{\frac{\partial^2 F}{\partial u^j \partial u^j}}_{\text{wichtiger Term}} (\tilde{c}(t))\dot{\tilde{c}}^j(t)$$

$\tilde{v}$ und $\dot{\tilde{v}}$ in der lok. Param.

$$\tilde{v}(t) = \sum_{i=1}^{2} \tilde{\xi}^i(t) \frac{\partial F}{\partial u^i}(\tilde{c}(t))$$

$$\dot{\tilde{v}}(t) = \sum_{i=1}^{2} \xi^i \tilde{(} t) \frac{\partial F}{\partial u^l}(\tilde{c}(t)) + \tilde{\xi}^i \sum_{j=1}^{2} \underbrace{\frac{\partial^2 F}{\partial u^j \partial u^j}}_{\text{wichtiger Term}} (\tilde{c}(t)) \dot{\tilde{c}}^j(t)$$

Definition Christoffelsymbole

Den Ausdruck $\frac{\partial^2 F}{\partial u^i \partial u^j}$ betrachten wir in der Basis $\left\{ \frac{\partial F}{\partial u^1}, \frac{\partial F}{\partial u^2}, N(F(u)) \right\}$ des $\mathbb{R}^3$, also

$$\underbrace{\frac{\partial^2 F}{\partial u^i \partial u^j}} = \Gamma^1_{ij} \frac{\partial F}{\partial u^1} + \Gamma^2_{ij} \frac{\partial F}{\partial u^2} + h_{ij}(u) N(F(u))$$

Die Γ^l_{ij} heißen dann Cristoffelsymbole. Es sind insgesamt 8, aber wegen $\Gamma^l_{ij} = \Gamma^l_{ji}$ (Satz von Schwarz) bleiben 6 zu berechnen.

Definition Christoffelsymbole

Den Ausdruck $\frac{\partial^2 F}{\partial u^i \partial u^j}$ betrachten wir in der Basis $\left\{ \frac{\partial F}{\partial u^1}, \frac{\partial F}{\partial u^2}, N(F(u)) \right\}$ des $\mathbb{R}^3$, also

$$\underbrace{\frac{\partial^2 F}{\partial u^i \partial u^j}} = \Gamma_{ij}^1 \frac{\partial F}{\partial u^1} + \Gamma_{ij}^2 \frac{\partial F}{\partial u^2} + h_{ij}(u) N(F(u))$$

Die Γ_{ij}^l heißen dann Cristoffelsymbole. Es sind insgesamt 8, aber wegen $\Gamma_{ij}^l = \Gamma_{ji}^l$ (Satz von Schwarz) bleiben 6 zu berechnen.

Definition Christoffelsymbole

Den Ausdruck $\frac{\partial^2 F}{\partial u^i \partial u^j}$ betrachten wir in der Basis $\left\{ \frac{\partial F}{\partial u^1}, \frac{\partial F}{\partial u^2}, N(F(u)) \right\}$ des $\mathbb{R}^3$, also

$$\underbrace{\frac{\partial^2 F}{\partial u^i \partial u^j}} = \Gamma^1_{ij} \frac{\partial F}{\partial u^1} + \Gamma^2_{ij} \frac{\partial F}{\partial u^2} + h_{ij}(u) N(F(u))$$

Die Γ^l_{ij} heißen dann Cristoffelsymbole. Es sind insgesamt 8, aber wegen $\Gamma^l_{ij} = \Gamma^l_{ji}$ (Satz von Schwarz) bleiben 6 zu berechnen.

Christoffelsymbole werden benützt

Wir wenden $\Pi_{c(t)}$ auf$(*)$ an

$$\Pi_{c(t)}\dot{\tilde{v}}(t) = \Pi_{c(t)}[\sum_{i=1}^{2} \tilde{\xi^i}(t)\frac{\partial F}{\partial u^l}(\tilde{c}(t)) + \tilde{\xi}^i \sum_{j=1}^{2} \underbrace{\frac{\partial^2 F}{\partial u^j \partial u^j}}_{\text{wichtiger Term}} (\tilde{c}(t))\dot{\tilde{c}}^j(t)]$$

und schreiben dies mit den Christoffelsymbolen als

$$\Pi_{c(t)}\dot{\tilde{v}}(t) = \Pi_{c(t)}[\sum_{i=1}^{2} \tilde{\xi^i}(t)\frac{\partial F}{\partial u^l}(\tilde{c}(t))$$

$$+\tilde{\xi}^i \sum_{j=1}^{2} \Gamma^l_{ij}(\tilde{c}(t))\tilde{\xi}(t)\dot{\tilde{c}}^j(t)\frac{\partial F}{\partial u^l}(\tilde{c}(t) + \underbrace{\text{stuff}\sim\text{N}}_{\textit{fällt mit } \Pi \textit{ raus}}\ ]$$

Christoffelsymbole werden benützt

Wir wenden $\Pi_{c(t)}$ auf$(*)$ an

$$\Pi_{c(t)}\dot{v}(t) = \Pi_{c(t)}[\sum_{i=1}^{2}\xi^i\tilde{(}t)\frac{\partial F}{\partial u^l}(\tilde{c}(t)) + \tilde{\xi}^i \sum_{j=1}^{2} \underbrace{\frac{\partial^2 F}{\partial u^i \partial u^j}}_{\text{wichtiger Term}} (\tilde{c}(t))\dot{\tilde{c}}^j(t)]$$

und schreiben dies mit den Christoffelsymbolen als

$$\Pi_{c(t)}\dot{v}(t) = \Pi_{c(t)}[\sum_{i=1}^{2}\xi^i\tilde{(}t)\frac{\partial F}{\partial u^l}(\tilde{c}(t))$$

$$+\tilde{\xi}^i \sum_{j=1}^{2}\Gamma^l_{ij}(\tilde{c}(t))\tilde{\xi}(t)\dot{\tilde{c}}^j(t)\frac{\partial F}{\partial u^l}(\tilde{c}(t) + \underbrace{\text{stuff}\sim\text{N}}_{f\ddot{a}llt\ mit\ \Pi\ raus}\ ]$$

Umschreiben und ernten

Geschickter angeschrieben erhalten wir

$$\sum_{i,j,l=1}^{2}(\dot{\tilde{\xi}}^l(t)+\Gamma^l_{ij}(\tilde{c}(t))\tilde{\xi}(t)\dot{\tilde{c}}^j(t))\frac{\partial F}{\partial u^l}(\tilde{c}(t)\ mit\ \dot{\tilde{c}}^j(t)=\omega^j(c(t))=\tilde{\omega}^j(t)$$

,

Das gibt insgesamt ohne weiteres anschreiben der Fußpunkte

$$v=\sum_{l=1}^{2}\xi^l\frac{\partial F}{\partial u^i}\longmapsto\sum_{i,j,l=1}^{2}(\dot{\xi}^l+\Gamma^l_{i,j}\xi^i\dot{c}^j)\frac{\partial F}{\partial u^l}$$

Die kovariante Ableitung besteht also aus der “normalen” Ableitung $\dot{\xi}$ und Korrekturtermen die aus den Γ^l_{ij} und Elementen von T_pS bestehen

Umschreiben und ernten

Geschickter angeschrieben erhalten wir

$$\sum_{i,j,l=1}^{2} (\dot{\tilde{\xi}}^l(t) + \Gamma_{ij}^l(\tilde{c}(t))\tilde{\xi}(t)\dot{\tilde{c}}^j(t))\frac{\partial F}{\partial u^l}(\tilde{c}(t) \; mit \; \dot{\tilde{c}}^j(t) = \omega^j(c(t)) = \tilde{\omega}^j(t)$$

,

Das gibt insgesamt ohne weiteres anschreiben der Fußpunkte

$$v = \sum_{l=1}^{2} \xi^l \frac{\partial F}{\partial u^i} \longmapsto \sum_{i,j,l=1}^{2} (\dot{\xi}^l + \Gamma_{i,j}^l \xi^i \dot{c}^j)\frac{\partial F}{\partial u^l}$$

Die kovariante Ableitung besteht also aus der “normalen” Ableitung $\dot{\xi}$ und Korrekturtermen die aus den Γ_{ij}^l und Elementen von T_pS bestehen

Umschreiben und ernten

Geschickter angeschrieben erhalten wir

$$\sum_{i,j,l=1}^{2}(\dot{\tilde{\xi}}^l(t)+\Gamma^l_{ij}(\tilde{c}(t))\tilde{\xi}(t)\dot{\tilde{c}}^j(t))\frac{\partial F}{\partial u^l}(\tilde{c}(t)\ mit\ \dot{\tilde{c}}^j(t)=\omega^j(c(t))=\tilde{\omega}^j(t)$$

,

Das gibt insgesamt ohne weiteres anschreiben der Fußpunkte

$$v=\sum_{l=1}^{2}\xi^l\frac{\partial F}{\partial u^i}\longmapsto\sum_{i,j,l=1}^{2}(\dot{\xi}^l+\Gamma^l_{i,j}\xi^i\dot{c}^j)\frac{\partial F}{\partial u^l}$$

Die kovariante Ableitung besteht also aus der “normalen” Ableitung $\dot{\xi}$ und Korrekturtermen die aus den Γ^l_{ij} und Elementen von T_pS bestehen

∇ als Größe der inneren Geometrie

Die Christoffelsymbole können mit Lemma 4.2.14 aus den Komponenten g_{ij}der ersten Fundamentalform berechnet werden:

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{2}\left(\frac{\partial g_{jm}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^m}\right)g^{mk}$$

Damit sind sie eine Größe der inneren Geometrie

Womit auch die kovariante Ableitung zur inneren Geometrie gehört

∇ als Größe der inneren Geometrie

Die Christoffelsymbole können mit Lemma 4.2.14 aus den Komponenten g_{ij}der ersten Fundamentalform berechnet werden:

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{2}(\frac{\partial g_{jm}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^m})g^{mk}$$

Damit sind sie eine Größe der inneren Geometrie

Womit auch die kovariante Ableitung zur inneren Geometrie gehört

∇ als Größe der inneren Geometrie

Die Christoffelsymbole können mit Lemma 4.2.14 aus den Komponenten g_{ij}der ersten Fundamentalform berechnet werden:

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{2}\left(\frac{\partial g_{jm}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^m}\right)g^{mk}$$

Damit sind sie eine Größe der inneren Geometrie

Womit auch die kovariante Ableitung zur inneren Geometrie gehört