24. n schwarze Sessel sind im Kreis aufgestellt. Wieviele Möglichkeiten gibt es, einige Sessel so rot zu streichen, dass keine zwei roten Sessel benachbart sind? (Beispiel: Für $n = 3$ kann man höchstens einen Sessel rot streichen. Es gibt also 4 Möglichkeiten.)

25. Wieviele Möglichkeiten gibt es, ein $2 \times n$–Rechteck mit Dominos und 2×2–Quadraten zu überdecken?

26. Differenziere die Gleichung $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ auf beiden Seiten k–mal und berechne so die Koeffizienten der Potenzreihe $\frac{1}{(1-z)^{k+1}}$.

27. Verwende erzeugende Funktionen, um geschlossene Ausdrücke für die folgenden Folgen zu berechnen:

(a) $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ und $a_0 = 1, a_1 = 2$

(b) $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ und $a_0 = 2, a_1 = 5$

28. Finde einen geschlossenen Ausdruck für die Glieder der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die der Rekursion $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + (-1)^n$ mit den Anfangsbedingungen $a_0 = a_1 = 1$ genügt.

29. Finde einen geschlossenen Ausdruck für die Glieder der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die der Rekursion $a_n = -a_{n-1} + 5a_{n-2} - 3a_{n-3}$ mit den Anfangsbedingungen $a_0 = 7, a_1 = -12, a_2 = 49$ genügt.

30. Auf wieviele Arten kann ein $3 \times 2n$–Rechteck mit Dominos überdeckt werden? (Hinweis: Bezeichne mit a_n diese Anzahl und mit b_n die Überdeckungen eines solchen Rechtecks, bei dem in der letzten Spalte ein Domino fehlt. Zeige, dass $a_n = a_{n-1} + 2b_n$ und $b_n = a_{n-1} + b_{n-1}$. Leite daraus Gleichungen für die erzeugenden Funktionen a und b her, aus denen sich a und damit a_n berechnen lässt.)

31. Sei $f(m, n)$ die Anzahl der Wege von $(0, 0)$ nach (m, n) in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, wobei die einzelnen Schritte von der Form $(1, 0)$ (Schritt in die x–Richtung), $(0, 1)$ (Schritt in die y–Richtung) oder $(1, 1)$ (diagonaler Schritt) sind. Man zeige, dass für die erzeugende Funktion dieser Zahlen

$$\sum_{m,n\geq 0} f(m, n)x^m y^n = \frac{1}{1 - x - y - xy}$$

gilt.

32. Man zeige für die Fibonaccizahlen F_n die Identität

$$\sum_{k=0}^{n} F_k F_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} (k+1) F_{k+1} (-2)^{n-k}$$

33. Finde einen geschlossenen Ausdruck für die Folge mit $a_0 = 1$ und

$$\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} = 1$$

34. Gib kombinatorische Beweise für die folgenden beiden Identitäten:

(a) $S(n+1, m+1) = \sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k} S(k, m)$

(b) $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$

(B_n sind die Bellzahlen, die Anzahl aller (Mengen–)Partitionen von $\{1, 2, \ldots, n\}$.)

35. Zeige für die Stirlingzahlen der zweiten Art die Identität

$$\sum_{n=0}^{\infty} S(n+r, r) z^n = \frac{1}{(1-z)(1-2z)\ldots(1-rz)}.$$

Folgere daraus

$$S(n+r, r) = \sum a_1 a_2 \ldots a_n,$$

wobei in dieser Summe über alle $\binom{n+r-1}{n}$ ungeordneten Stichproben $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ der Größe n mit Wiederholung aus $\{1, 2, \ldots, r\}$ summiert wird.
Beispiel: $S(5, 3) = 25 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3$.

36. Drücke die folgenden Zahlen durch Stirlingzahlen aus

(a) Anzahl der surjektiven Abbildungen $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, k\}$.

(b) Anzahl aller Funktionen $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, k\}$ mit *beschränktem Wachstum*, d.h. $f(1) = 1$ und $f(i) \leq \max\{f(1), f(2), \ldots f(i-1)\} + 1$ für $2 \leq i \leq n$.

37. Finde einen geschlossenen Ausdruck für $S(n, 3)$.

38. Zeige, dass die Anzahl aller Partitionen einer n–elementigen Menge, wo in keinem Block zwei aufeinanderfolgende Zahlen enthalten sind, gleich der Bellzahl B_{n-1} ist.