Proseminar zur Diskreten Mathematik

Theresia Eisenkölbl

WS 03/04

1. In einer Schachtel sind 4 rote, 2 blaue, 5 gelbe und 3 grüne Stifte. Wieviele muss man mit geschlossenen Augen nehmen, um sicher von jeder Farbe einen zu haben?

2. In einer Lade sind 4 rote, 2 blaue, 5 gelbe und 3 grüne Socken. Wieviele muss man mit geschlossenen Augen nehmen, um sicher zwei gleichfarbige Socken zu haben?

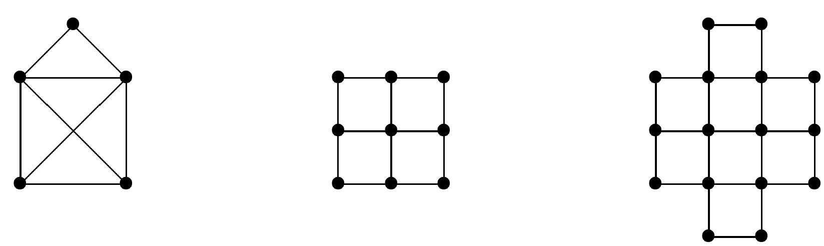
3. (a) Von 6 Personen sind manche miteinander befreundet und manche nicht. Zeige, dass zwei von ihnen gleichviele Freunde haben.
(*Hinweis: In diesem Beispiel gibt es keine "einseitigen" Freundschaften. Betrachte die Fälle, dass jemand gar keine Freunde hat und dass alle mindestens einen Freund haben, getrennt.*

(b) Zeige, dass es in Wien zwei Personen gibt, die mit der gleichen Anzahl von Wienern befreundet sind.

4. Wir betrachten jetzt Eulersche *Wege*, die zwar wie Eulersche Touren jede Kante genau einmal benutzen, aber nicht zum Ausgangspunkt zurückkehren müssen.

(a) Gibt es einen solchen Weg für das Königsberger Brückenproblem aus der Vorlesung?

(b) Gibt es einen solchen Weg für die drei Graphen in der folgenden Abbildung?



(c) Versuche, eine allgemeine Bedingung anzugeben, wann es in einem zusammenhängenden Graph einen solchen Weg gibt.

5. Eine Maus findet einen großen Würfel Käse, der aus 27 kleinen gleichgroßen Würfeln besteht. Ist es möglich, dass die Maus die 26 äußeren Würfel so frisst, dass immer nur direkt benachbarte Würfel nacheinander drankommen?

6. Es sind einige Münzen gegeben, von denen eine leichter ist, die anderen alle gleich schwer. Was ist die größte Anzahl von Münzen, unter denen man mit zwei Wägungen mit einer Balkenwaage sicher die leichte herausfinden kann?

7. Beim Lotto 6 aus 45 werden aus den Zahlen 1–45 zufällig sechs gezogen. Dann wird noch eine siebente als Zusatzzahl bestimmt.
Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit für einen Fünfer beim Lotto 6 aus 45? einen Fünfer mit Zusatzzahl (d.h. fünf richtige und die Zusatzzahl)?

8. Wie hoch ist beim Lotto 6 aus 45 die Wahrscheinlichkeit, dass unter den 6 gezogenen Zahlen zwei aufeinanderfolgende Zahlen sind?

9. Bestimme die ersten Glieder der folgenden Zahlenfolgen (für $n = 1, 2, 3, \ldots$). Versuche, die allgemeine Gestalt zu erraten (ohne Beweis).

(a) Die Anzahl der verschiedenen Summen von n verschiedenen Zahlen aus $\{1, 2, \ldots, 2n\}$.

(b) Die Anzahl der Möglichkeiten, die Zahl n als Summe von ganzen Zahlen größer oder gleich 2 zu schreiben, wobei es auf die Reihenfolge der Summanden ankommt.

(c) Die maximale Anzahl von Teilen, in die man eine Kreisfläche mit n Geraden teilen kann.

10. (a) 6 Personen spielen bei einem (kleinen) Tennisturnier mit. Auf wieviele Arten kann man sie in drei Paare für die erste Runde einteilen?

(b) Löse dieselbe Aufgabe für $2n$ Personen.

11. Zeige, dass für die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ gilt:

$$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \cdots < \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \binom{n}{\lceil n/2 \rceil} > \cdots > \binom{n}{n}.$$

(Diese Eigenschaft heißt Unimodalität der Binomialkoeffizienten. $\lfloor x \rfloor$ erhält man durch Abrunden von x, $\lceil x \rceil$ durch Aufrunden.)

12. (a) Aus einem Parlament mit n Abgeordneten wird ein Ausschuss mit k Mitgliedern gebildet. Diese wählen sich dann r Vorsitzende. Wieviele Möglichkeiten gibt es, dass zu tun?

(b) Welcher Ausdruck ergibt sich, wenn zuerst die r Vorsitzenden gewählt werden und dann aus den restlichen Abgeordneten die restlichen Ausschussmitglieder?

(c) Welche Identität für Binomialkoeffizienten ergibt sich aus den ersten beiden Punkten?

(d) Was ergibt sich für $r = 1$?