39. Zeige $B_n < n!$ für alle $n > 2$.
(Hinweis: Finde eine Permutation zu jeder Partition.)

40. Zeige für alle Permutationen π in $\mathcal{S}_n$, dass $\operatorname{inv}\pi = \operatorname{inv}\pi^{-1}$.

41. Gib einen kombinatorischen Beweis für die Gleichung $I_{n+1} = I_n + nI_{n-1}$, wobei I_n die Anzahl der Involutionen in $\mathcal{S}_n$ ist.

42. (a) Setze $x_2 = 1$ und $x_1 = x_3 = x_4 = \cdots = 0$ in der erzeugenden Funktion (3.6) im Skriptum für die nach Zyklentyp gewichtete Abzählung von Permutationen. Was hat das mit Beispiel **10** zu tun?

(b) Wie kann man analog für die Einteilung von $3n$ Personen in Dreiergruppen vorgehen?

43. Für welche Folge $\mathbf{k} = [k_1, k_2, \ldots, k_n] \in \mathbb{N}_0^n$ mit $\sum_{i=1}^n ik_i = n$ ergibt sich die größte Anzahl an Permutationen $\pi \in \mathcal{S}_n$ vom Zyklentyp $\mathbf{k}$?

44. (a) Sei $I(n,k)$ die Anzahl der Permutationen $\pi \in \mathcal{S}_n$ mit k Inversionen. Zeige für $n \geq k$ die Gleichung

$$I(n+1,k) = I(n,k) + I(n+1,k-1).$$

(b) Zeige mit Hilfe dieser Rekursion, dass für $n \geq k$ die Zahl I(n,k) ein Polynom in n vom Grad k und führendem Koeffizienten $1/k!$ ist. Für $n \geq 2$ gilt beispielsweise $I(n,2) = (n+1)(n-2)/2$. Berechne das Polynom für $k = 3$.

45. Berechne die folgenden Summen.

(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}\frac{i}{j}$ (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=k}^{n}\binom{j}{k}\frac{3^k}{2^j}$ (c) $\displaystyle\sum_{k_1=0}^{n}\sum_{k_2=0}^{n}\sum_{k_3=0}^{n}\binom{k_1}{k_2}\binom{k_3}{k_1}x^{k_2}$

46. Unter einer *Partition einer natürlichen Zahl* n versteht man eine Darstellung von n als ungeordnete Summe von natürlichen Zahlen größer als 0 (verschiedene Anordnungen der Summanden zählen also nur einmal). So lässt sich zum Beispiel die Zahl 5 darstellen als 5, $4+1$, $3+2$, $3+1+1$, $2+2+1$, $2+1+1$, $1+1+1+1+1$. Die einzelnen Summanden einer Partition heißen *Teile* der Partition.

(a) Es sei a_n die Anzahl der Partitionen von n in Teile der Größe 1 und 2. Zeige, dass für die erzeugende Funktion $\sum_{n=0}^\infty a_n q^n = \dfrac{1}{(1-q)(1-q^2)}$ gilt.

(b) Es sei $p(n)$ die Anzahl aller Partitionen von n. Zeige, dass für die erzeugende Funktion $\sum_{n=0}^\infty p(n)q^n = \prod_{k=1}^\infty \dfrac{1}{1-q^k}$ gilt.

47. Zeige die folgenden beiden Gleichungen:

(a) $\dfrac{1}{1-q} = (1+q)(1+q^2)(1+q^4)(1+q^8)\dots,$

(b) $(1+q)(1+q^2)(1+q^3)\dots = \dfrac{1}{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\dots}.$

Versuche, eine kombinatorische Interpretation für diese Gleichungen zu finden.

48. Eine Meinungsumfrage ergibt, dass die Prozentsätze der Wähler, die mit den Kandidaten A, B, C zufrieden sind, 65%, 57% bzw. 58% sind. Weiters würden 28% Kandidat A oder B akzeptieren, 30% Kandidat A oder C, 27% Kandidat B oder C, und 12% wären mit jedem der drei Kandidaten zufrieden. Was kann man daraus schließen?

49. Sei $\varphi(n)$ die Anzahl der zu n relativ primen Zahlen k mit $1 \le k \le n$. Beweise mit Inklusion–Exklusion die Formel

$$\varphi(n) = n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{p_s}\right),$$

wobei p_i die Primteiler von n sind.

50. Benutze das Prinzip der Inklusion und Exklusion, um die Anzahl der Teilmengen von $\{1, 2, \dots, n\}$, die keine der Zahlen $1, 2, \dots, k$ enthalten, zu bestimmen.

51. Es sei $f(m, n)$ die Anzahl der $m \times n$–Matrizen mit Einträgen 0 und 1, wobei in jeder Zeile und Spalte mindestens ein Einser vorkommen soll. Beweise die Gleichung

$$f(m,n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (2^{n-k}-1)^m.$$

52. Berechne $\sum_{k=0}^{n} k^m$ für $m = 1, 2, 3, 4$ unter Verwendung des Gosperschen Algorithmus.

53. Berechne $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k} 4^{-k}$.

54. Berechne $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k^4 4^k}{\binom{2k}{k}}$.

55. Berechne $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{k} 2^{-k}$.