13. Für ein Fest ist ein runder Tisch mit 7 Sesseln und 7 Namensschildern vorbereitet. Die Gäste übersehen die Namensschilder und setzen sich zufällig so hin, dass niemand am richtigen Platz sitzt. Zeige, dass man den Tisch so drehen kann, dass mindestens zwei der Gäste vor ihrem richtigen Namensschild sitzen.

14. Zeige durch Einsetzen der Definition der Binomialkoeffizienten:

(a) $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$

(b) $\binom{n}{k}\binom{k}{r} = \binom{n}{r}\binom{n-r}{k-r}$

15. Finde kombinatorische Beweise für

(a) $\sum_{i=1}^{n} i\binom{n}{i} = n2^{n-1}$

(b) $\sum_{m=k}^{n} \binom{m}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$

Welche bekannte Formel ergibt sich aus (b) für $k = 1$?

16. Auf wieviele Arten können wir die Zahlen $1, 2, \ldots, n$ in einer Reihe anordnen, sodass abgesehen vom ersten Element die Zahl k nur dann drankommen darf, falls $k-1$ oder $k+1$ schon vorgekommen sind ? Beispiel: 3 2 4 5 1 6 oder 4 3 5 2 6 1

17. Im Parlament eines Landes gibt es 183 Sitze und 3 Parteien. Wieviele Möglichkeiten der Sitzverteilung gibt es, sodass keine Partei eine absolute Mehrheit hat?

18. Wieviele Möglichkeiten gibt es für n Personen, einen Kreis zu bilden, wobei zwei Anordnungen als gleich betrachtet werden sollen, wenn jede Person in beiden dieselben NachbarInnen hat (nicht unbedingt auf denselben Seiten) ?

19. Wieviele k–tupel von Mengen $(T_1, T_2, \ldots, T_k)$ gibt es mit

$$T_1 \subseteq T_2 \subseteq \cdots \subseteq T_k \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}?$$

(*Hinweis: Wieviele Möglichkeiten gibt es für 1? 2? ...*)

20. Welche Identität für Binomialkoeffizienten ergibt sich durch Ablesen des Koeffizienten von z^{2k} auf beiden Seiten der Gleichung

$$\left(1 - z^2\right)^n = (1-z)^n(1+z)^n \; ?$$

21. Sei p eine Primzahl. Zeige: p teilt $\binom{p}{k}$ für $1 \leq k \leq p-1$.

F1 (freiwillig!): Sei p eine Primzahl, k eine natürliche Zahl. $a \equiv b \mod m$ bedeutet m teilt $a - b$.

(a) Zeige $(1+x)^{rp+s} \equiv (1+x^p)^r(1+x)^s \mod p$ gilt koeffizientenweise.

(b) Lies die Koeffizienten von x^{ap+b} in (a) für $0 \leq s < p$ und $0 \leq b < p$ ab.

(c) Seien $n = n_0 + n_1 p + n_2 p^2 + \cdots + n_r p^r$ und $k = k_0 + k_1 p + k_2 p^2 + \cdots + k_r p^r$ die Ziffernentwicklungen von n und k zur Basis p. Dann gilt

$$\binom{n}{k} \equiv \prod_{j=0}^{r} \binom{n_j}{k_j} \mod p.$$

(d) Wie kann man daher aus der Binärentwicklung von n und k ablesen, wann der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ ungerade ist?

22. Die Fibonaccizahlen F_n sind durch die Rekursion $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $n \geq 2$ und die Anfangsbedingungen $F_0 = F_1 = 1$ gegeben. Man zeige für $n, k \geq 0$ die Matrixidentität

$$\begin{pmatrix} F_n & F_{n+k} \\ F_{n+1} & F_{n+k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} F_0 & F_k \\ F_1 & F_{k+1} \end{pmatrix}.$$

Daraus folgere man

$$F_n F_{n+k+1} - F_{n+1} F_{n+k} = (-1)^n F_{k-1}.$$

Was ergibt sich im Fall $k = 1$?

(*Hinweis: Induktion nach n, Determinanten*)

F2 (freiwillig) Seien $\widetilde{F}_n = F_{n-1}$ die Fibonaccizahlen mit verschobenem Index (also $\widetilde{F}_n = \widetilde{F}_{n-1} + \widetilde{F}_{n-2}, \widetilde{F}_0 = 0, \widetilde{F}_1 = 1$). Dabei ist ggT der größte gemeinsame Teiler.

(a) Zeige aus der Rekursionsformel: $\mathrm{ggT}(\widetilde{F}_n, \widetilde{F}_{n+1}) = 1$.

(b) Verwende das vorhergehende Beispiel, um $\mathrm{ggT}(\widetilde{F}_n, \widetilde{F}_m) = \mathrm{ggT}(\widetilde{F}_n, \widetilde{F}_{n-m})$ und damit $\mathrm{ggT}(\widetilde{F}_n, \widetilde{F}_m) = \widetilde{F}_{ggT(m,n)}$ zu zeigen.

23. Wieviele Kompositionen von n in lauter ungerade Summanden gibt es? (Drücke die Antwort durch Fibonaccizahlen aus.)
(*Hinweis: Fallunterscheidung letzter Summand ist 1 oder größer*)