Beispiel: Zeige, dass die Anzahl aller Partitionen einer n–elementigen Menge, wo in keinem Block zwei aufeinanderfolgende Zahlen enthalten sind, gleich der Bellzahl B_{n-1} ist.

Beweis 1: Sei $\widetilde{S}(n,k)$ die Anzahl der Partitionen der Menge $\{1,2,\ldots,n\}$ in k Blöcke, wobei keine zwei aufeinanderfolgenden Zahlen im selben Block stehen. Wir überlegen uns die folgende Rekursionsgleichung:

$$\widetilde{S}(n+1,k+1) = \widetilde{S}(n,k) + k\widetilde{S}(n,k+1).$$

Dabei wird wieder zwischen den beiden Fällen unterschieden, dass das Element $n+1$ alleine einen Block bildet oder nicht. Der einzige Unterschied zu den Stirlingzahlen ist, dass es im zweiten Fall einen Block gibt, in den das Element nicht dazugegeben werden darf (nämlich den Block, der n enthält). Daher ist der Faktor auch k statt $k+1$.

Die dazugehörigen Anfangsbedingungen lauten

- $\widetilde{S}(1,1) = 1$, da es genau die Partition $\{\{1\}\}$ gibt,
- $\widetilde{S}(n,1) = 0$ für $n > 1$, da in dem einen großen Block automatisch zwei aufeinanderfolgende Elemente wären,
- und $\widetilde{S}(1,k) = 0$ für, da aus einem Element nicht mehrere Blöcke gebildet werden können.

Vergleichen wir das mit Rekursion und Anfangsbedingungen der Stirlingzahlen:

- $S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k)$,
- $S(0,0) = 1$,
- $S(n,0) = 0$ für $n > 0$
- und $S(0,k) = 0$ für $k > 0$,

ergibt sich sofort $\widetilde{S}(n,k) = S(n-1,k-1)$.

Durch Summieren über alle k erhält man das gewünschte Ergebnis B_{n-1} für die gesuchte Anzahl $\sum_{k=1}^{n} \widetilde{S}(n,k)$. $\square$

Beweis 2: Wir beschreiben eine Bijektion, die aus einer Partition π der Menge $\{1,2,\ldots,n-1\}$ eine Partition der Menge $\{1,2,\ldots,n\}$ ohne aufeinanderfolgende Zahlen im selben Block macht. Dazu betrachten wir alle Zahlenfolgen der Form $i, i+1, \ldots, j$ mit $j > i$, wo alle Zahlen im selben Block von π liegen, aber $i-1$ und $j+1$ nicht in diesem Block liegen. (Es handelt sich also um eine maximale Folge von aufeinanderfolgenden Zahlen.)

Von jeder solchen Folge nehmen wir die Zahlen $j-1, j-3, j-5\ldots$ und geben diese in einen zusätzlichen Block mit n. (Beispiel: Die Partition 1**67**|**234**|5 wird zu 17|24|5|**368**.) Es ist klar, dass auf diese Art eine Partition von $\{1,2,\ldots,n\}$ erzeugt wird, in der keine aufeinanderfolgenden Zahlen im selben Block stehen, da ja aus jedem Lauf jede zweite Zahl entfernt worden ist, und $n-1$ sicher nicht zu n gegeben worden ist. Dass diese Abbildung wirklich eine Bijektion ist, sieht man, indem man die Umkehrabbildung angibt. Die besteht aber einfach darin, dass der Block, der das Element n enthält, aufgelöst wird, und jedes Element j ($\neq n$) aus diesem Block in den Block getan wird, der bereits $j+1$ enthält.

$\square$