Beispiel 49

Aufgabe. Sei $\varphi(n)$ die Anzahl der zu n relativ primen Zahlen k mit $1 \leq k \leq n$. Beweise mit Inklusion–Exklusion die Formel

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{p_s}\right),$$

wobei p_i die Primteiler von n sind.

Lösung. Es sei E_i für $1 \leq i \leq s$ die Eigenschaft einer Zahl aus $\{1, 2, \dots, n\}$, durch den Primteiler p_i teilbar zu sein. Die zu n relativ primen Zahlen sind genau diejenigen, die keine dieser Eigenschaften erfüllen, daher können wir das Prinzip der Inklusion und Exklusion anwenden und die gesuchte Anzahl ist:

$$n - \sum_{i=1}^{s} N(E_i) + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq s} N(E_{i_1}, E_{i_2}) - + \cdots + (-1)^s N(E_1, E_2, \dots, E_s)$$

Es ist leicht zu sehen, dass die Anzahl der Vielfachen eines Teilers d von n gleich $\dfrac{n}{d}$ ist und damit

$$N(E_{i_1}, \dots, E_{i_l}) = \frac{n}{p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_l}}.$$

Der resultierende Ausdruck

$$\begin{aligned} n - \sum_{i=1}^{s} \frac{n}{p_i} + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq s} \frac{n}{p_{i_1} p_{i_2}} - + \cdots + (-1)^s \frac{n}{p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_s}} \\ = n\left(1 - \sum_{i=1}^{s} \frac{1}{p_i} + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq s} \frac{1}{p_{i_1} p_{i_2}} - + \cdots + (-1)^s \frac{1}{p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_s}}\right) \end{aligned}$$

ist aber genau das, was man durch Ausmultiplizieren der rechten Seite der Formel in der Angabe erhält. (Dabei enthält die Summe über r Summanden die Terme, die durch Auswählen von genau $n - r$ Einsern beim Ausmultiplizieren entstehen.) □

Beispiel 50

Aufgabe. Benutze das Prinzip der Inklusion und Exklusion, um die Anzahl der Teilmengen von $\{1, 2, \dots, n\}$, die keine der Zahlen $1, 2, \dots, k$ enthalten, zu bestimmen.

Lösung. Es sei E_j die Eigenschaft einer Teilmenge von $\{1, 2, \dots, n\}$, die Zahl j zu enthalten. Aus dem Prinzip der Inklusion-Exklusion erhalten wir den folgenden Ausdruck für die gesuchte Anzahl der Mengen, die keine Eigenschaft $E_1, \dots, E_k$ erfüllt:

$$\binom{n}{k} - \sum_{j=1}^{k} N(E_j) + \sum_{1 \leq j_1 < j_2 \leq k} N(E_{j_1}, E_{j_2}) - + \cdots + (-1)^k N(E_1, E_2, \dots, E_k)$$

Betrachten wir die Summe über d Variablen in diesem Ausdruck. Es gibt 2^{n-d} Möglichkeiten die restlichen Elemente der Menge zu wählen, die nicht schon durch die Eigenschaften festgelegt sind. Weiters gibt es $\binom{k}{d}$ Summanden. Also erhalten wir die Summe

$$\sum_{d=0}^{k} (-1)^d 2^{n-d} \binom{k}{d} = 2^n \sum_{d=0}^{k} \binom{k}{d} \left(-\frac{1}{2}\right)^d = 2^n \left(\frac{1}{2}\right)^d = 2^{n-d},$$

was natürlich ohne Anwendung von Inklusion-Exklusion sofort direkt überprüft werden kann. □