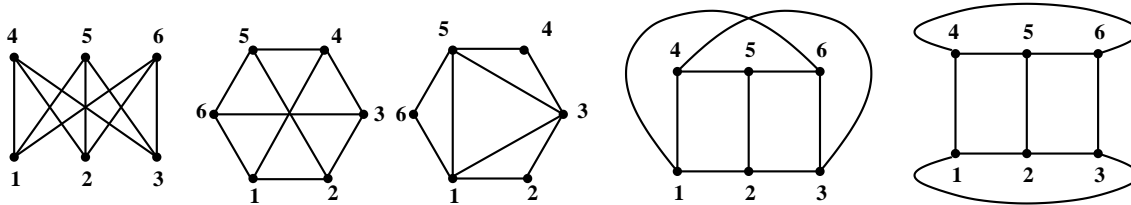


Proseminar zur Graphentheorie

Theresia Eisenkölbl
Sommersemester 2004

1. Welche der folgenden Graphen sind isomorph? Welche sind sogar identisch?



2. Zeige die folgende Ungleichungskette für Minimal- und Maximalgrad:

$$\min_{v \in V} d(v) \leq \frac{2|E|}{|V|} \leq \max_{v \in V} d(v).$$

3. In einem Graphen mit mindestens zwei Knoten gibt es zwei Knoten vom selben Grad.

4. Das Komplement G^c von G ist der Graph mit Knotenmenge $V(G)$, wo zwei Knoten genau dann verbunden sind, wenn sie in G nicht verbunden sind.

Beschreibe den Graphen $K_{m,n}^c$.

5. Ein Graph heißt selbstkomplementär, wenn $G \cong G^c$.

(a) Zeige, dass für einen selbstkomplementären Graphen $|V| \equiv 0, 1 \pmod 4$ gilt.

(b) Finde 2 Graphen mit $G^c \cong G$.

6. Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $V = \{0, 1\}^n$, d.h. V sei die Menge aller 0-1-Folgen der Länge n . Zwei Knoten seien genau dann verbunden, wenn sich die Folgen in genau einer Koordinate unterscheiden. Dieser Graph heißt n -dimensionaler Würfel. Bestimme

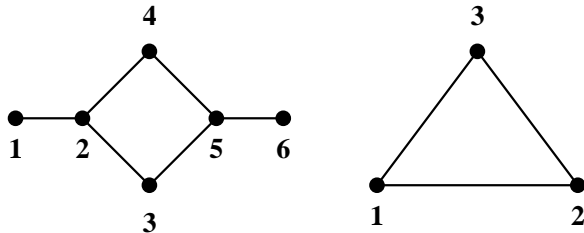
(a) die Kantenanzahl

(b) die Grade der Knoten

(c) den maximalen Abstand, den zwei Knoten in diesem Graph haben können.

7. Ein Isomorphismus eines Graphen zu sich selbst ist ein Automorphismus.

- (a) Zeige: Die Automorphismen eines Graphen G bilden eine Gruppe bezüglich Zusammensetzung von Funktionen.
- (b) Wie sehen die Automorphismengruppen der beiden folgenden Graphen aus?



- (c) Was ist die Automorphismengruppe von K_n ?
- (d) Zeige, dass G und G^c dieselbe Automorphismengruppe haben.

8. Der Graph G sei bipartit, d.h. die Knotenmenge V zerfällt in zwei Teile X und Y , sodass es keine Kanten zwischen zwei Knoten aus der Teilmenge gibt. Außerdem soll jeder Knoten im Graphen denselben Grad haben.

Zeige: Die Mengen X und Y sind gleich groß.

9. (*) Wie müssen die Argumente aus der Vorlesung modifiziert werden, um den Brouwerschen Fixpunktsatz in n Dimensionen zu erhalten?

10. Finde Kreise maximaler und minimaler Länge im Petersengraph und im Dodekaedergraph.

11. Welche der Graphen aus Beispiel 1 sind bipartit?

12. Finde im folgenden Graphen kürzeste Wege vom Knoten u zu allen anderen Knoten.

