

Aufgaben zu Ausgewählte Kapitel aus Komplexe Analysis

Theresia Eisenkölbl

Z.1 Sei f eine Funktion, die bis auf isolierte Singularitäten holomorph auf $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ist. Wie müsste das Residuum bei ∞ definiert werden, damit sich alle Residuen in $\overline{\mathbb{C}}$ auf 0 summieren?

Z.2 Was ist $\text{Res}_\infty(\exp(z + z^{-1}))$?

Z.3 Es sei q eine rationale Funktion ohne positive reelle Pole. Der Nennergrad von q sei um mindestens 2 größer als der Zählergrad. Zeige:

$$\int_0^\infty q(z) dz = - \sum_{w \in \tilde{\mathbb{C}}} \text{Res}_w(q(z) \ln z)$$

(Dabei ist $\tilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$ und \ln der Zweig des Logarithmus, der die Winkel $0 \leq \varphi < 2\pi$ benutzt. Vergleiche den Beweis von Satz 14 auf Seite 72.)

Z.4 Berechne $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}}$.

Z.5 Sei $a > 1$. Berechne $\int_0^{2\pi} \frac{\sin(2\varphi)}{(a + \cos \varphi)(a - \sin \varphi)} d\varphi$.

Z.6 Berechne $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2 + a^2} dx$.

Z.7 Berechne $\int_0^\infty \frac{dx}{x^3 + x^2 + x + 1}$.

Z.8 Wieviele Nullstellen hat $z^5 + 3z^4 + 9z^3 + 10$ in $K_2(0)$?

Z.9 Wieviele Nullstellen hat $9z^5 + 5z - 4$ in $\{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < |z| < 5\}$?

Z.10 Berechne $\int_\gamma \frac{5z^6+4}{2z^7+1} dz$, wobei γ der Rand des Einheitskreises ist.