Lösung zum Übungstest (Dienstag)

Theresia Eisenkölbl

WS 05/06

1. Berechne den $\mathrm{ggT}(7+i, 10)$ in $\mathbb{Z}[i]$.

   Lösung:

   Wir zerlegen beide Zahlen in ihre Primfaktoren:

   $10 = 2 \cdot 5 = \varepsilon \cdot (1+i)^2 \cdot (2+i)(2-i)$, wobei ε eine Einheit ist.

   Es gilt $N(7+i) = 49 + 1 = 50 = 2 \cdot 5^2$, daher ist $7+i$ durch $1+i$ teilbar, und, da es offensichtlich nicht durch 5 teilbar ist, entweder durch $(2+i)^2$ oder $(2-i)^2$ teilbar.

   Wir überprüfen $(1+i)(2+i)^2 = (1+i)(3+4i) = -1 + 7i \sim i + 7$.

   Der Vergleich mit der Primfaktorzerlegung von 10 ergibt

   $$\mathrm{ggT}(7+i, 10) = (1+i)(2+i) = 1 + 3i.$$

   $\square$

2. Zeige, dass $17 \mid 7^{2n} - 2^{5n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

   Lösung:

   Wir rechnen modulo 17:

   $7^{2n} - 2^{5n} = 49^n - 32^n \equiv 15^n - 15^n = 0 \mod 17.$ $\square$

3. Berechne den $\mathrm{ggT}(x^6+1, x^{10}+1)$ in $\mathbb{C}[x]$.

   Lösung:

   $$\begin{aligned} x^{10}+1 &= (x^6+1) \cdot x^4 - x^4 + 1 \\ x^6 + 1 &= (-x^4+1) \cdot (-x^2) + x^2 + 1 \\ -x^4 + 1 &= (x^2+1) \cdot (-x^2+1) + 0 \end{aligned}$$

   Also ist der größte gemeinsame Teiler x^2+1. $\square$

4. Für welche $n \in \mathbb{N}$ ist $6^n - 1$ eine Primzahl?

   Lösung:

   Es gilt $5 = 6 - 1 \mid 6^n - 1^n$. Daher kann diese Zahl nur eine Primzahl sein, wenn sie selbst ± 5 ist. Das ist nur für $n = 1$ der Fall, da alle anderen Zahlen größer sind. $\square$

5. Faktorisiere das Polynom $X^3 + 1$ über $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ und $\mathbb{Z}(2)$.

   Lösung:

   $X^3 + 1 = (X + 1)(X^2 - X + 1)$ in allen Koeffizientenringen.

   Die quadratische Lösungsformel für den zweiten Faktor liefert die Nullstellen $\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. Diese liegen in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

   In $Z(2)$ ist das quadratische Polynom irreduzibel, weil weder 0 noch 1 eine Nullstelle in $Z(2)$ sind ($X^2 - X + 1$ also in beiden Fällen als ganze Zahl ungerade ist).

   Daher haben wir die Faktorisierungen:

$$
\begin{aligned}
X^3 + 1 &= (X + 1)(X^2 - X + 1) && \text{über } \mathbb{Z}, \mathbb{R} \text{ und } \mathbb{Z}(2), \\
X^3 + 1 &= (X + 1)\left(X - \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)\left(X - \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right) && \text{über } \mathbb{C}.
\end{aligned}
$$

□