

Übungen zur Zahlentheorie

Theresia Eisenkölbl

WS 05/06

- Für welche Primzahlen n ($n \leq 1000$) gilt: $n \mid 2^n - 2$?
 - Für welche Nichtprimzahlen n ($n \leq 1000$) gilt: $n \mid 2^n - 2$?
 - Gibt es Nichtprimzahlen, für die $n \mid a^n - a$ für alle $a \in \mathbb{N}$? (ohne Beweis)
 - Gibt es Primzahlen, für die $n^2 \mid 2^n - 2$?
- Sei $\pi(n)$ die Anzahl der Primzahlen von 1 bis n . In Mathematica heißt diese Funktion PrimePi.
Plotte die Funktion $\pi(n)$ und vergleiche sie mit den Graphen von einfachen Funktionen wie $n, n^2, \log(n), \exp(n)$.
- Eine Zahl heißt vollkommen, wenn sie mit der Summe aller ihrer positiven Teiler außer der Zahl selbst übereinstimmt (z.B: $6=1+2+3$).
Finde noch weitere vollkommene Zahlen.
- Zwei Zahlen heißen befreundet, wenn die Summe der positiven Teiler außer der Zahl selbst jeweils die andere ergibt. Finde Paare von befreundeten Zahlen. Gibt es auch größere Gruppen von befreundeten Zahlen?
- Untersuche, welche Primzahlen Summe von zwei Quadraten sind.
(z.B. $5 = 2^2 + 1^2, 41 = 4^2 + 5^2 \dots$)
 - Untersuche, welche Zahlen allgemein Summe von zwei Quadraten sind.
- Betrachte die Folge $11+0 \cdot 1, 11+1 \cdot 2, 11+2 \cdot 3 \dots$. Besteht sie aus lauter Primzahlen? Finde ähnliche andere Zahlenfolgen.
- Finde einen Quader mit ganzzahligen Seitenlängen und ganzzahligen Flächendiagonalen.
- Stelle eine Vermutung auf, welche ganzen Zahlen sich als Summe von vier Quadraten schreiben lassen.
- Stelle eine Vermutung auf, was folgende Ausdrücke ergeben:

(a)
$$\sum_{p \text{ prim}} \frac{1}{p}$$