(b) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$

(c) $\prod_{p \text{ prim}} \frac{p^2+1}{p^2-1}$

Experimentiere auch mit ähnlichen anderen Ausdrücken.

**10**. Die Fibonaccizahlen $F_n$ (`Fibonacci[n]` in Mathematica) sind definiert durch $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ und $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

(a) Untersuche, welche Fibonaccizahlen gerade sind.

(b) Untersuche allgemeiner, wann eine Fibonaccizahl eine andere teilt.

**11**. Die $n-$te Fermat'sche Zahl ist definiert durch $F_n = 2^{2^n}+1$, $n = 0, 1, \ldots$, die $n-$te Mersennezahl ist definiert durch $M_n = 2^n - 1$, $n = 1, 2, \ldots$.

Untersuche, welche Fermat'schen Zahlen und Mersenne'schen Zahlen Primzahlen sind.

**12**. Untersuche, wann ein Binomialkoeffizient gerade und wann ungerade ist.

**13**. Finde die kleinste Zahl mit genau $k$ positiven Teilern für $k = 1, 2, \ldots 6$.

**14**. Eine Zahl heißt vollkommen, wenn sie mit der Summe aller ihrer positiven Teiler außer der Zahl selbst übereinstimmt (z.B: 6=1+2+3).

Zeige: Falls $M_n$ eine (Mersenne'sche) Primzahl ist, dann ist $2^{n-1}(2^n - 1)$ vollkommen.

**15**. (a) Zeige: $(a - b) \mid (a^n - b^n)$.

(b) Zeige: $(a^m - b^m) \mid (a^n - b^n)$ für $m|n$.

(c) Gilt auch $(a^m - b^m) \mid (a^n - b^n) \Rightarrow m \mid n$?

**16**. Es sei $T_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)$ mit $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

(a) Zeige: $T_1 = 1, T_2 = 1, T_3 = 2, ..., T_{n+2} = T_{n+1} + T_n$, also $T_n = F_n$.

(b) Welche Schwierigkeiten treten auf, wenn man jetzt Übung **15** verwenden will um zu beweisen, dass $m \mid n \Rightarrow F_m \mid F_n$?

**17**. Zeige: $13 \mid 4^{2n+1} + 3^{n+2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$.

**18**. Zeige: $6 \mid n^3 - n$ für alle $n$ in $\mathbb{N}$.