31. Bestimme $\mathrm{ggT}(n!+1,(n+1)!+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

32. Sigmund Freud war auf Anregung von Wilhelm Fließ davon überzeugt, dass die Zahlen 23 und 28 eine besondere Rolle spielen und daher Zahlen von der Form $23x+28y$ besondere Bedeutung haben (z.B $13 = 3\cdot 23 - 2\cdot 28$). Diese Ansicht fand er dadurch bestätigt, dass sich wichtige Zahlen tatsächlich so darstellen ließen.

(a) Welche Zahlen haben diese Eigenschaft, d.h. sind von der Form $23x+28y$ mit $x, y \in \mathbb{Z}$?

(b) Was ändert sich, wenn 23 und 28 durch andere Zahlen ersetzt werden?

33. Zeige: Die Lösungen der Gleichung $ax + by = m$ haben allgemein die Gestalt

$$x = x_0 + k \cdot \frac{b}{d}, \quad y = y_0 - k \cdot \frac{a}{d} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

wobei (x_0, y_0) eine spezielle Lösung ist und $d = \mathrm{ggT}(a, b)$.

34. Es seien a, b teilerfremde ganze Zahlen.

(a) Zeige, dass $\frac{x}{b} + \frac{y}{a} = \frac{1}{ab}$ für geeignete ganze Zahlen x, y.

(b) Es seien das regelmäßige a- und das regelmäßige b-Eck mit Zirkel und Lineal konstruierbar. Zeige, dass dann auch das regelmäßige ab–Eck konstruierbar ist.

(c) Folgt aus der Konstruierbarkeit des ab–Ecks auch die Konstruierbarkeit des a–Ecks?

(Hinweis: Der Winkel im Umkreismittelpunkt zu benachbarten Punkten des regelmäßigen a–Ecks ist $2\pi/a$.)

35. Bestimme $\mathrm{ggT}(60, 25, 45)$ und $\mathrm{ggT}(112, 68, 14)$.

36. Seien $a, b, c, n \in \mathbb{N}$ mit $(a, b) = 1$ und $a \cdot b = c^n$. Zeige: Dann existieren natürliche Zahlen v, w mit $a = v^n$ und $b = w^n$. (Verwende dazu das Fundamentaltheorem der Arithmetik oder die eindeutige Primfaktorzerlegung.)

37. Zeige $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, d.h. $\sqrt{2}$ ist irrational. Was geht genau in den Beweis ein?

38. Am fünfzackigen Stern, dem Ordenssymbol der Pythagoreer lässt sich geometrisch die Existenz von irrationalen Zahlen beweisen. Das Ziel ist zu zeigen, dass das Verhältnis von Seite zu Diagonale in einem regelmäßigen Fünfeck irrational ist.

Die Diagonalen in einem regelmäßigen Fünfeck $ABCDE$ bilden in der Mitte ein kleines 5–Eck $A'B'C'D'E'$ (siehe Abbildung unten für die Beschriftung).