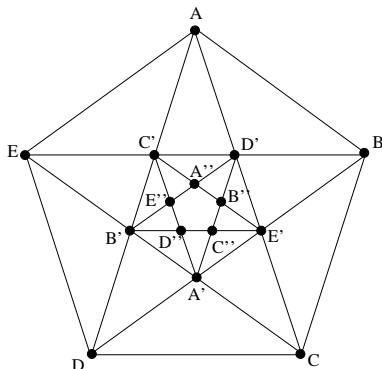


- (a) Bezeichne Seite und Diagonale im großen Fünfeck mit s und d , im kleinen Fünfeck mit s' und d' . Zeige, dass $d' = d - s$ und $s' = s - d'$.
(Hinweis: Verwende z.B, dass viele Parallelogramme in der Zeichnung enthalten sind wie $AEDE'$, $BD'B'E'$ und $DA'D'B'$.)
- (b) Wir nehmen jetzt an, dass das Verhältnis $s : d$ rational ist. Zeige, dass wir dann ein Fünfeck mit $s, d \in \mathbb{Z}$ finden können.
- (c) Zeige: Unter diesen Annahmen hat das kleine Fünfeck in der Mitte auch ganzzahlige Seiten und Diagonalen. Warum führt das zu einem Widerspruch?



39. Aus den Gleichungen, die wir in Übung 38a hergeleitet haben, lässt sich über das Verhältnis von Seite zu Diagonale im Fünfeck mehr sagen, als das es irrational ist.

- (a) Die Gleichungen lassen sich in der Form

$$\begin{aligned} d &= 1 \cdot s + d' \\ s &= 1 \cdot d' + s' \end{aligned}$$

als erste Schritte des euklidischen Algorithmus deuten. Erkläre, warum der Algorithmus in diesem Fall nicht abbricht.

- (b) Zeige, dass

$$d : s = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

40. Für $a = 17, b = 7$ ergibt der Euklidische Algorithmus $17 = 2 \cdot 7 + 3, 7 = 2 \cdot 3 + 1, 3 = 3 \cdot 1 + 0$.

Daraus ergibt sich $\frac{17}{7} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}$.

Erkläre, wie die entsprechende Gleichung für allgemeines a, b ausfällt.

Zeige andererseits für natürliche Zahlen a, b mit $\frac{a}{b} = 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{5}}$, dass sich im Euklidischen Algorithmus $q_0 = 3, q_1 = 2,$ und $q_2 = 5$ ergibt.