

77. Zeige: $\varphi(n)$ ist gerade für $n \geq 3$.

78. Zeige $\mathbb{Z}(2)^*$ und $\mathbb{Z}(4)^*$ sind zyklisch, aber $\mathbb{Z}(8)^*$ ist nicht zyklisch.

79. (a) Für welche $n \leq 30$ hat die Zahl $1/n$ eine Dezimalbruchentwicklung mit Periode $n - 1$?

(b) Für welche $n \leq 30$ ist 10 eine Primitivwurzel von $\mathbb{Z}(n)^*$?

(c) Erkläre den Zusammenhang zwischen den beiden Eigenschaften.

80. Betrachte die Matrix M mit $M_{ij} = \text{ggT}(i, j)$, $i, j = 1, \dots, n$. Sei weiters D die Diagonalmatrix mit $\varphi(k)$ auf der Diagonale und $L_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i \mid j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

(a) Zeige $M = L^T \cdot D \cdot L$.

(b) Was ist die Determinante von M ?

81. Beweise, dass

$$\sum_{d|n} \tau(d)^3 = \left(\sum_{d|n} \tau(d) \right)^2.$$

(Beachte, dass $\sum_{k=1}^n k^3 = (\sum_{k=1}^n k)^2$.)

82. Zeige, dass die Formel für $\left(\frac{2}{m}\right)$, m ungerade, bereits aus dem quadratischen Reziprozitätsgesetz und der Formel für $\left(\frac{-1}{m}\right)$ folgt.

Hinweis: $\left(\frac{2}{m}\right) = \left(\frac{2-m}{m}\right) = \left(\frac{-1}{m}\right) \left(\frac{m-2}{m}\right)$.

83. Berechne für $x \geq 1$: $\sum_{k \leq x} \mu(k) \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor$.

Hinweis: $\left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor$ ist die Anzahl aller Vielfachen von k kleiner oder gleich x .

84. Sei p eine ungerade Primzahl.

(a) Zeige: Es gibt mod p gleichviele quadratische wie nichtquadratische Reste.

(b) Zeige: $\sum_{a=1}^{p-1} \left(\frac{a}{p}\right) = 0$.

(c) Zeige: $\sum_{a=0}^{p-1} \left(\frac{ma+n}{p}\right) = 0$ für $(p, m) = 1$.