(e) Gibt es einen Graph, dessen Automorphismengruppe isomorph zur zyklischen Gruppe der Ordnung 3 ist?

6. Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $V = \{0,1\}^n$, d.h. V sei die Menge aller 0-1–Folgen der Länge n. Zwei Knoten seien genau dann verbunden, wenn sich die Folgen in genau einer Koordinate unterscheiden. Dieser Graph heißt n–dimensionaler Würfel. Bestimme

(a) die Kantenanzahl

(b) die Grade der Knoten

(c) den maximalen Abstand, den zwei Knoten in diesem Graph haben können.

7. Zeige die folgende Ungleichungskette für Minimal– und Maximalgrad:

$$\min_{v \in V} d(v) \leq \frac{2|E|}{|V|} \leq \max_{v \in V} d(v).$$

8. Der Graph G sei bipartit, d.h. die Knotenmenge V zerfällt in zwei Teile X und Y, sodass es keine Kanten zwischen zwei Knoten aus der Teilmenge gibt. Außerdem soll jeder Knoten im Graphen denselben Grad haben.

Zeige: Die Mengen X und Y sind gleich groß.

9. Sei $K_{a,b,c}$ ein vollständiger tripartiter Graph. Das heißt, die Knoten liegen in drei verschiedenen Gruppen mit a, b bzw. c vielen Elementen, und jeder Knoten ist mit allen Knoten aus den anderen beiden Gruppen verbunden.

(a) Zeichne $K_{2,2,2}$. Lässt sich dieser Graph auch ohne Überschneidungen von Kanten zeichnen?

(b) Wieviele Kanten hat $K_{3,4,5}$?

10. Ein Graph ist k–partit, wenn seine Knotenmenge so in k Teilmengen zerlegt werden kann, dass keine Kante beide Endpunkte in derselben Teilmenge hat. Ein vollständiger k–partiter Graph hat bei vorgegebener Zerlegung in Teilmengen alle erlaubten Kanten. Mit $T_{m,n}$ bezeichnen wir den m–partiten Graphen mit n Knoten, wo alle Teilmengen entweder die Größe $\lfloor n/m \rfloor$ oder $\lceil n/m \rceil$ haben.

Zeige: Die Anzahl der Kanten von $T_{n,m}$ ist $\binom{n-q}{2} + (m-1)\binom{q+1}{2}$ mit $q = \lfloor n/m \rfloor$.

11. Wie müssen die Argumente aus der Vorlesung modifiziert werden, um den Brouwerschen Fixpunktsatz in n Dimensionen zu erhalten?

12. Finde Kreise maximaler und minimaler Länge im Petersengraph und im Dodekaedergraph.