65. Bestimme $R(3,3)$, das minimale n, sodass jede Kantenfärbung des K_n mit rot und blau ein rotes oder ein blaues Dreieck enthält.

66. Zeige, dass es einen Graphen mit n Knoten gibt, sodass zwischen je zwei Knoten genau eine gerichtete Kante verläuft, der mindestens $n!2^{-n+1}$ gerichtete Hamiltonsche Pfade enthält (also Pfade, die jeden Knoten genau einmal enthalten, aber nicht zum Anfang zurückkehren).

67. Zeige, dass jeder Graph mit m Kanten einen k-partiten Teilgraphen mit mindestens $(k-1)m/k$ Kanten enthält.
(Hinweis: Betrachte eine zufällige k-Färbung der Knoten. Was ist der Erwartungswert für die Anzahl der Kanten, die Knoten von verschiedener Farbe verbinden?)

68. Sei $M \geq 0$ fix. Für $n \geq 2M$ sei $H_{n,M}$ der Graph bestehend aus M unabhängigen Kanten und $n - 2M$ isolierten Knoten und $G_{n,M}$ ein Zufallsgraph mit n Knoten und M Kanten, wobei alle Kanten gleichwahrscheinlich gewählt werden.

Zeige $\lim\limits_{n\to\infty} P(G_{n,M} \cong H_{n,M}) = 1$.

69. Zeige, dass ein Graph mit n Knoten und m Kanten einen bipartiten Teilgraphen mit mindestens $\dfrac{2\lfloor n^2/4\rfloor\, m}{n(n-1)}$ Kanten enthält.

(Hinweis: Betrachte zufällige Bipartitionen in möglichst gleichgroße Klassen.)

70. Seien G_1 und G_2 zwei Graphen mit n Knoten und m_1 bzw. m_2 Kanten. Zeige, dass es einen Teilgraphen von G_1 mit mindestens $\frac{m_1 m_2}{\binom{n}{2}}$ Kanten gibt, der isomorph zu einem Teilgraph von G_2 ist.