

Zweite Schularbeit Mathematik Klasse 7D WIKU am 17.12.2014

SCHÜLERNAME: _____

Punkte im ersten Teil: _____

Punkte im zweiten Teil: _____

Davon Kompensationspunkte: _____

Note: _____

Notenschlüssel:

Falls die Summe der erzielten Kompensationspunkte im zweiten Teil und des ersten Teils weniger als 16 ist, so ist die Note **Nicht Genügend**. Falls diese Summe 16 oder mehr beträgt, dann wird folgender Notenschlüssel benutzt:

NOTENSCHLÜSSEL	
41 - 48 Punkte	Sehr Gut (1)
33 - 40 Punkte	Gut (2)
25 - 32 Punkte	Befriedigend (3)
16 - 24 Punkte	Genügend (4)

Aufgabe 1. (2P)

Wählen Sie eine richtige Möglichkeit aus, um einen korrekten mathematischen Satz zu bilden.

Wenn eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ①, dann gilt ②.

Möglichkeiten für ①	
den konstanten Wert 3 hat	
monoton steigend ist	
monoton fallend ist	

Möglichkeiten für ②	
$f' \geq 0$	
$f' = 0$	
$f' \leq 0$	

Aufgabe 2. (2P) Gegeben sind die Funktionen $f_1(x) = e^x$ und $f_2(x) = \ln(x)$. Entscheiden Sie, ob untenstehenden Aussagen auf f_1 oder f_2 zutreffen.

Aussage	Funktion
Die Funktion ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert.	
Die Tangente an der Stelle $x = 1$ hat Steigung e .	
Die Funktion hat eine Nullstelle.	
Der Graph der Funktion hat eine Rechtskrümmung.	
Im Limes $x \rightarrow \infty$ geht die Steigung gegen Null.	

Aufgabe 3. (2P) Bestimmen Sie einen Wert von a sodass die Funktion $H(x) = x^3 + 2x^2 + ax$ **keine** Extremstellen hat.

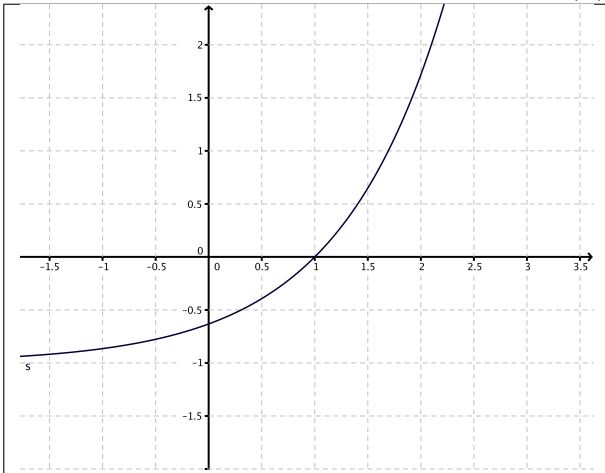
Aufgabe 4. (2P) Bestimmen Sie die Gleichung $y = kx + d$ für die Tangente im Punkt $(2|3)$ am Graphen der Funktion $f(x) = x^3 - x^2 - 1$.

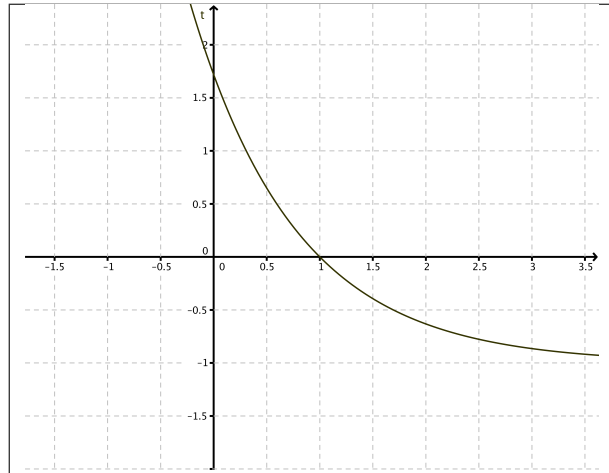
$y = kx + d$ mit $k =$ _____ und $d =$ _____.

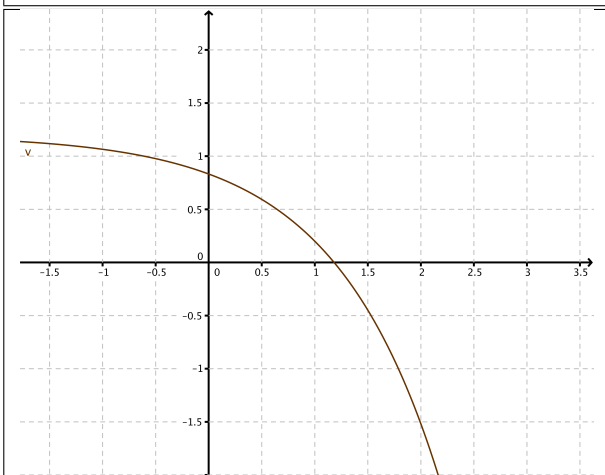
Aufgabe 5. (2P) Kreuzen Sie die 3 richtigen Aussagen an!

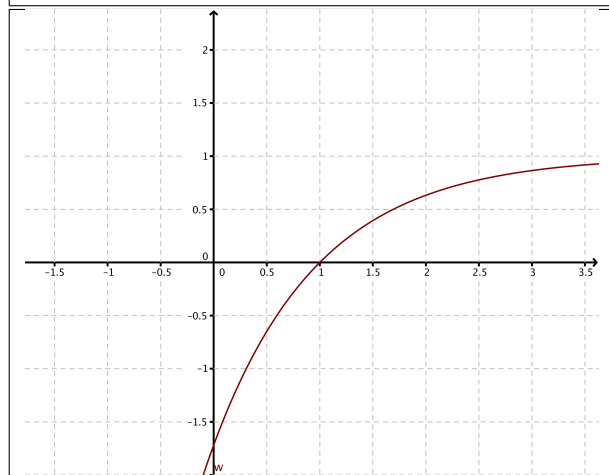
1. <input type="checkbox"/>	Eine lineare Funktion f erfüllt die Bedingung $\frac{df}{dx} = f(x+1) - f(x)$.
2. <input type="checkbox"/>	Die erste Ableitung eines Polynoms von Grad n ist ein Polynom von Grad $n - 1$.
3. <input type="checkbox"/>	Wenn $f'(x) = 0$ für alle x , dann ist der Graph von f parallel zur y -Achse.
4. <input type="checkbox"/>	Wenn $f'(x) = 0$ und $f''(x) > 0$, dann hat f an der Stelle x ein Maximum.
5. <input type="checkbox"/>	Wenn $f'(x) < 0$ auf dem Intervall $[a, b]$, dann ist f monoton fallend auf $[a, b]$.

Aufgabe 6. (2P) Von einer Funktion $f(x)$ ist bekannt, dass sie (1) auf dem Intervall $(-\infty, 1)$ monoton steigend ist und (2) genau bei $x = 1$ ein Maximum hat. Bestimmen Sie, welche Graphik den Graphen von der ersten Ableitung $f'(x)$ darstellen könnte.









Aufgabe 7. (2P) Betrachten Sie folgende trigonometrische Funktionen

$$f_1(x) = \sin(x)^2, \quad f_2(x) = 2 \cos(x), \quad f_3(x) = \sin(2x), \quad f_4(x) = \sin(x) \cos(x), \quad f_5(x) = \cos(-2x).$$

Ordnen Sie jede trigonometrische Funktion ihrer ersten Ableitung zu und schreiben Sie f_1 , f_2 , f_3 , f_4 und f_5 an die richtige Stelle!

(a) Die Funktion _____ hat erste Ableitung $2 \cos(x)^2 - 2 \sin(x)^2 = 2 \cos(2x)$.

(b) Die Funktion _____ hat erste Ableitung $2 \sin(x) \cos(x)$.

(c) Die Funktion _____ hat erste Ableitung $2 \sin(2x)$.

(d) Die Funktion _____ hat erste Ableitung $-2 \sin(x)$.

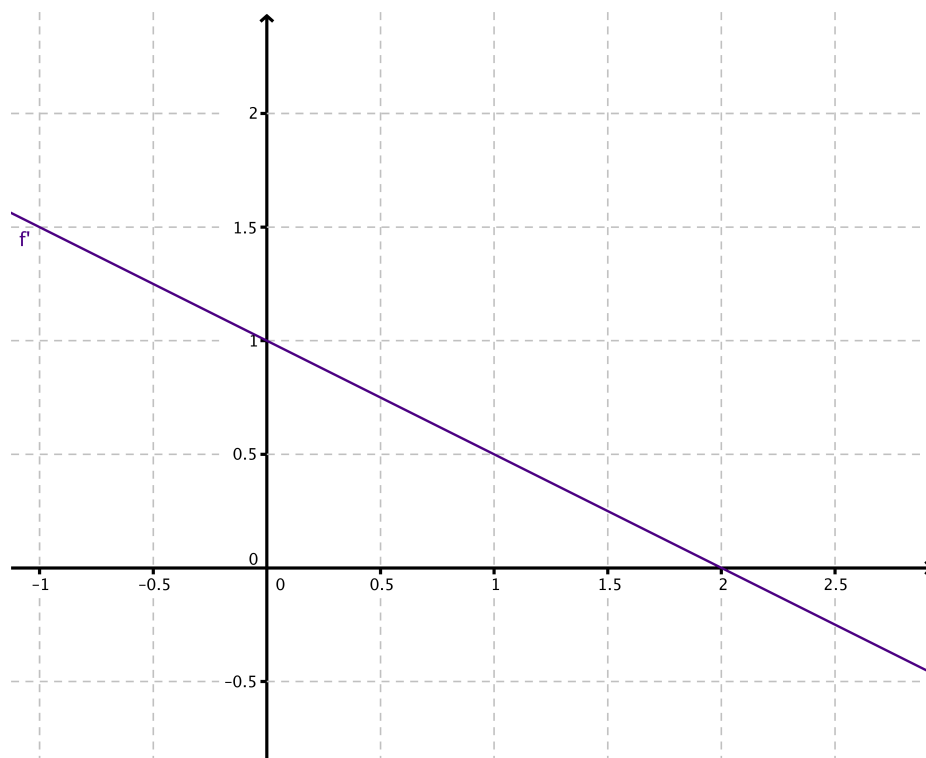
(e) Die Funktion _____ hat erste Ableitung $\cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos(2x)$.

INFO: $\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$, $\sin(2\alpha) = 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)$

Aufgabe 8. (2P) Bestimmen Sie den Winkel, unter welchem die Tangente im Punkt $(-\frac{\pi}{4} | -\frac{1}{2})$ am Graphen der Funktion $g(x) = \frac{1}{2} \cdot \tan(x)$ die x -Achse schneidet. Achtung: $g'(x) = \frac{1}{2 \cos^2(x)}$.

Aufgabe 9. (2P) Die Funktion $h(x) = \ln(x^2 - 3x + 4)$ ist positiv, hat Ableitung $h'(x) = \frac{2x-3}{x^2-3x+4}$ und hat ein Minimum im Intervall $[-1, 5]$. Bestimmen Sie die genaue Stelle des Minimums.

Aufgabe 10. (2P) In der untenstehenden Figur sehen Sie den Graphen der ersten Ableitung f' einer Funktion f . Entscheiden Sie, welche 2 der unten stehenden Aussagen bezüglich f zutreffen.



1. <input type="checkbox"/>	f ist monoton fallend.
2. <input type="checkbox"/>	f hat ein Maximum an der Stelle $x = 2$.
3. <input type="checkbox"/>	An der Stelle $x = 0$ beträgt die Steigung der Tangente am Graphen von f 1.
4. <input type="checkbox"/>	f ist eine lineare Funktion.
5. <input type="checkbox"/>	$f > 0$ wenn $x < 0$.

Aufgabe 11. (2P) Beachten Sie die zweite Ableitung $m''(x) = -3 \sin(x)$ von der Funktion $m(x) = 3 \sin(x)$ und bestimmen Sie den Wendepunkt im Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Aufgabe 12. (2P) Die Sekante der Funktion $p(x) = \frac{x^3-x}{3}$ durch die Punkte $(0|0)$ und $(3|8)$ hat die Gleichung $y = \frac{8x}{3}$. Bestimmen Sie, an welcher Stelle im Intervall $[0, 3]$ die Tangente an dem Graphen von p parallel zur gegebenen Sekante ist.

Zweite Schularbeit Mathematik Klasse 7D WIKU am 17.12.2014

SCHÜLERNAME:

TEIL II

Aufgabe 1.

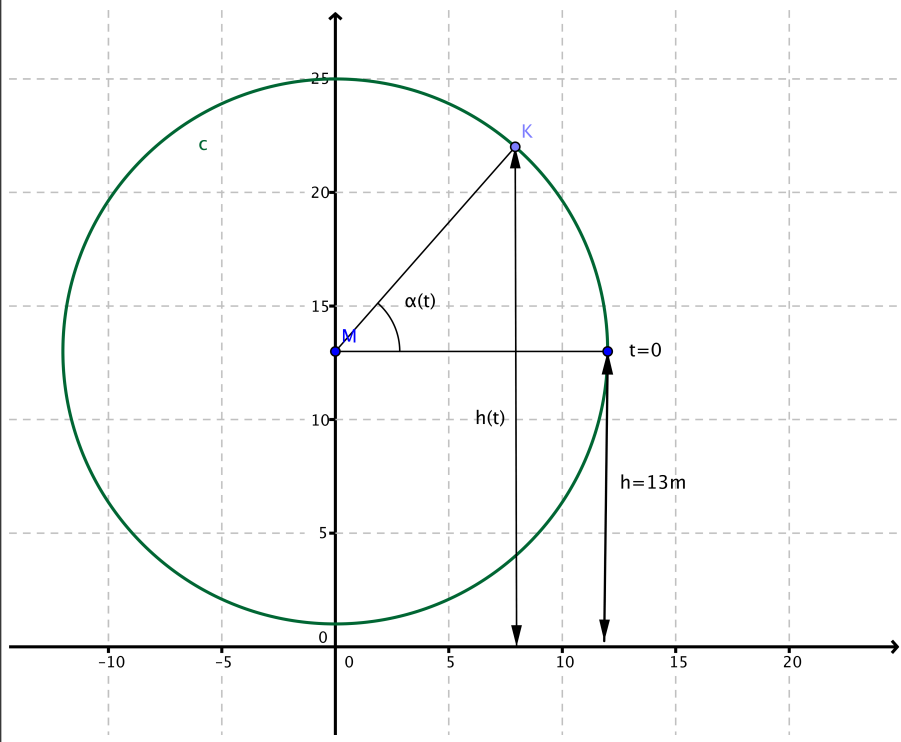
Ein Teilchen folgt in einem Teilchenbeschleuniger einer Bahn, deren x -Koordinate durch $x(t) = 20 \cos(8\pi t)$ und deren y -Koordinate durch $y(t) = 20 \sin(8\pi t)$ gegeben wird. In diesen Formeln werden die Koordinaten in Metern angegeben und die Zeit in Sekunden.

- (a) (1P, Kompensationspunkt) Zeigen Sie, dass $x(t)^2 + y(t)^2$ konstant ist, und bestimmen Sie den Wert dieser Konstante.
- (b) (2P, Kompensationspunkte) Bestimmen Sie, wie oft das Teilchen pro Sekunde um das Zentrum des Teilchenbeschleunigers dreht.
- (c) (2P) Die Geschwindigkeit des Teilchens wird durch den Vektor $\vec{v}(t) = (x'(t)|y'(t))$ gegeben. Bestimmen Sie die Größe $|\vec{v}(t)|$ dieses Geschwindigkeitsvektors. Achtung: Der Strich in $x'(t)$ bedeutet hier Differenzieren nach der Zeit t .
- (d) (2P) Zeigen Sie, dass der Ortsvektor $\vec{r}(t) = (x(t)|y(t))$ und den Geschwindigkeitsvektor normal auf einander stehen.
- (e) (2P) Zeigen Sie, dass der Ortsvektor $\vec{r}(t) = (x(t)|y(t))$ parallel zum Beschleunigungsvektor $\vec{a}(t) = (x''(t)|y''(t))$ ist, indem Sie eine Zahl K finden, sodass $\vec{a}(t) = K \cdot \vec{r}(t)$.

Aufgabe 2. Siehe auch die Figur hier unten.

Ein Riesenrad von 24 m Durchmesser, dessen Mittelpunkt M 13 m über den Boden liegt, dreht sich im Uhrzeigersinn mit einer Umdrehung jede 15 Minuten.

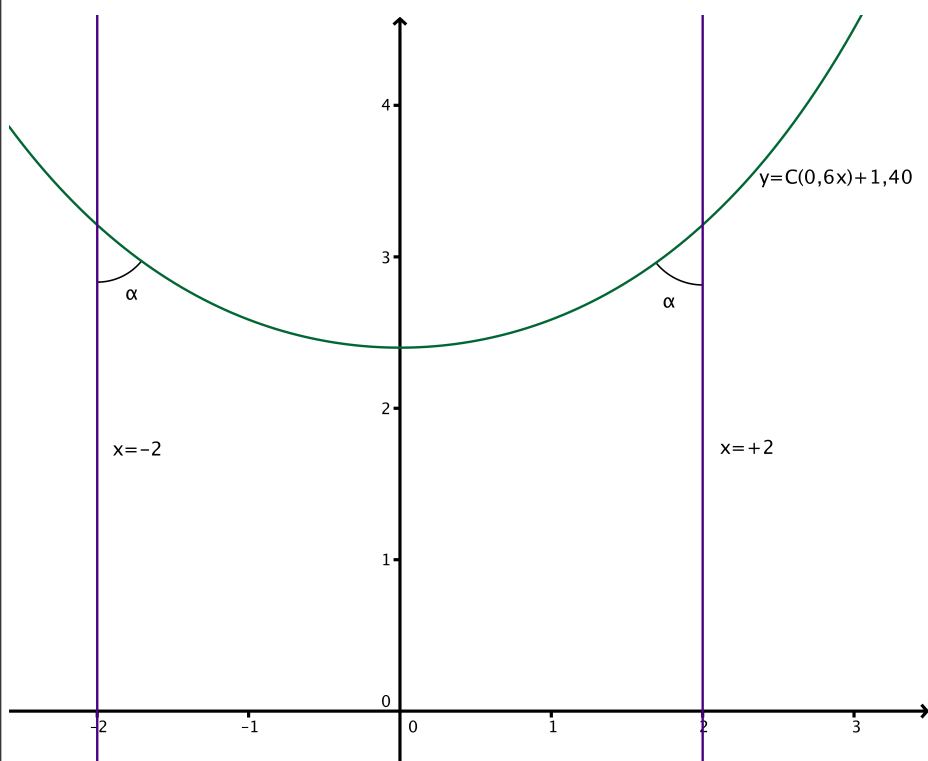
- (a) (2P) Stelle eine Formel auf, die zu jedem Zeitpunkt t die Höhe $h(t)$ einer Kabine K zuordnet, wobei für $t = 0$ die Kabine K sich auf der Höhe des Mittelpunktes des Riesenrads $h = 13$ m befindet. Hinweis: bestimmen Sie A, B, C sodass $h(t) = A \sin(Bt) + C$.
- (b) (2P) Bestimmen Sie, wie schnell die Kabine K steigt, wenn sie gerade die Höhe $h = 18$ m erreicht hat.



Aufgabe 3. Betrachten Sie die folgenden Funktionen:

$$C(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad S(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

- (a) (1P, Kompensationspunkt) Finden Sie $C'(x)$ und $S'(x)$.
- (b) (2P) Bestimmen Sie $a > 0$ sodass $2C'(a) = S'(a)$.
- (c) (2P) Zeigen Sie, dass $C(x)^2 - S(x)^2 = 1$.
- (d) (2P) Zeigen Sie, dass $C(x) \geq 1$.
- (e) (2P) Definieren Sie die Funktion $F(x) = \ln(C(x))$. Zeigen Sie, dass $F(x)$ für alle x definiert ist und drücken Sie die Ableitung $F'(x)$ in $C(x)$ und $S(x)$ aus.
- (f) (2P Kompensationspunkte) Eine Kette ist zwischen zwei Wänden, die sich bei $x = -2$ und $x = +2$ befinden, aufgehängt. Die Kette folgt dem Graphen der Funktion $y = C(0,6x) + 1,40$ – siehe die Figur hier unten. Bestimmen Sie den Winkel α zwischen Kette und der Wand bei den Aufhängepunkten (bei $x = +2$ oder $x = -2$, denn aus Symmetriegründen sind diese Winkel gleich).



BEURTEILUNGSBLATT TEIL II

Aufgaben und Punkteanzahlen			
Nr.	Erklärung	Punkte	von
1(a)			1
1(b)			2
1(c)			2
1(d)			2
1(e)			2
2(a)			2
2(b)			2
3(a)			1
3(b)			2
3(c)			2
3(d)			2
3(e)			2
3(f)			2
Insgesamt			24