Dritte Schularbeit Mathematik Klasse 7A G am 08.03.2016

SCHÜLERNAME: ____

Punkte im Basisteil: __________________ / 24

Punkte im Vertiefungsteil: __________________ /24

Davon Kompensationspunkte: __________________ /4

Note: ____________________________________

Notenschlüssel:
Falls die Summe der erzielten Kompensationspunkte im Vertiefungsteil und der erzielten Punkte des Basisteils weniger als 16 ist, so ist die Note `Nicht Genügend`. Falls diese Summe 16 oder mehr beträgt, dann wird folgender Notenschlüssel benutzt:

NOTENSCHLÜSSEL	
41 - 48 Punkte	Sehr Gut (1)
33 - 40 Punkte	Gut (2)
25 - 32 Punkte	Befriedigend (3)
16 - 24 Punkte	Genügend (4)

Aufgabe 1. (2P) **Funktionen mit Potenzen**.

Gegeben ist der Funktionswert $\sqrt[3]{25}$ von der Funktion $f(x) = 5^x$.

Aufgabenstellung: Ermitteln Sie die reelle Zahl x, sodass $f(x) = \sqrt[3]{25}$.

$x =$ ____________________

Aufgabe 2. (2P) **Cosinusfunktion**.

Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 3 \cdot \cos(\pi x)$.

Aufgabenstellung: Kreuzen Sie die 2 zutreffenden Aussagen an:

1. ☐	Die Funktion f hat genau eine Nullstelle.
2. ☐	$f(x+1) = -f(x)$.
3. ☐	$f(0) = 0$.
4. ☐	Die Funktion f ist monoton fallend.
5. ☐	Die Steigung von f an der Stelle $x = 0$ beträgt 0.

Aufgabe 3. (2P) **Sinusfunktion**.

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 6 \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{20} \cdot x\right)$.

Aufgabenstellung: Bestimmen Sie die Periode von f und die Steigung der Tangente an der Stelle $x = 0$.

Antwort:

Periode = ____________________ ,

Steigung der Tangente bei $x = 0$ beträgt: ____________________ .

Aufgabe 4. (2P) **Halbwertszeit**.

Im unterstehenden Diagramm ist die Menge $N(t)$ der noch nicht zerfallenen Atome eines radioaktiven Elements (in Gramm) als Funktion der Zeit t dargestellt (in Tagen). Der Zerfall gehorcht dem Gesetz $N(t) = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{t/\tau}$, wobei N_0 die Anfangsmenge zur Zeit $t = 0$ und τ die Halbwertszeit (in Tagen) ist.

Aufgabenstellung: Bestimmen Sie die Halbwertszeit τ.

Antwort: $\tau =$ ______________.

Aufgabe 5. (2P) **Ableitungen und Maximum**.

Betrachten Sie die Funktion $f(x) = xe^{-ax}$ mit $a > 0$.

Aufgabenstellung: Bestimmen Sie den Wert von a so, dass f ein Extremum an der Stelle $x = 2$ hat.

Antwort: $a =$ ___________________.

Aufgabe 6. (2P) **Proportional zu einander**
Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beschreibe eine direkte Proportionalität. Das heißt, dass $f(x)$ direkt proportional zu x ist.

Aufgabenstellung: Kreuzen Sie die richtigen 2 Aussagen an!

1. ☐	Der Graph von f geht durch den Ursprung.
2. ☐	Das Produkt $x \cdot f(x)$ ist für alle x gleich.
3. ☐	Die zweite Ableitung f'' von f ist positiv; $f''(x) > 0$ für alle x.
4. ☐	Der Graph von f ist eine Hyperbel.
5. ☐	$f(x+1) - f(x)$ ist unabhängig von x, also, für alle x gleich.

Aufgabe 7. (2P) **Differenzierregeln**.
Gegeben ist die Funktion $f(x) = 3x^2 + \sin(\pi x)$.

Aufgabenstellung: Kreuzen Sie die richtigen 2 Aussagen an!

(1) ☐	$f(0) = \pi$
(2) ☐	$f'(0) = -\pi$
(3) ☐	$f'(\pi) = 6\pi$
(4) ☐	$f'(1) = 6 - \pi$
(5) ☐	$f''(0) = 6$

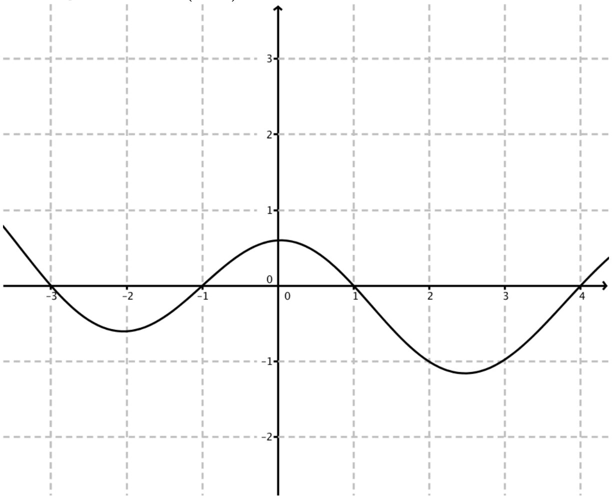
Aufgabe 8. (2P) **Lineare Funktionsgleichung**.

Die Funktion $f(x) = e^x$ geht durch den Punkt $(1|e)$. Der Graph der linearen Funktion $h(x) = kx+d$ berührt den Graphen von f im Punkt $(1|e)$ und daher ist der Graph von h eine Tangente von f im Punkt $(1|e)$.

Aufgabenstellung: Bestimmen Sie die Parameter k und d in der Funktionsgleichung von h.

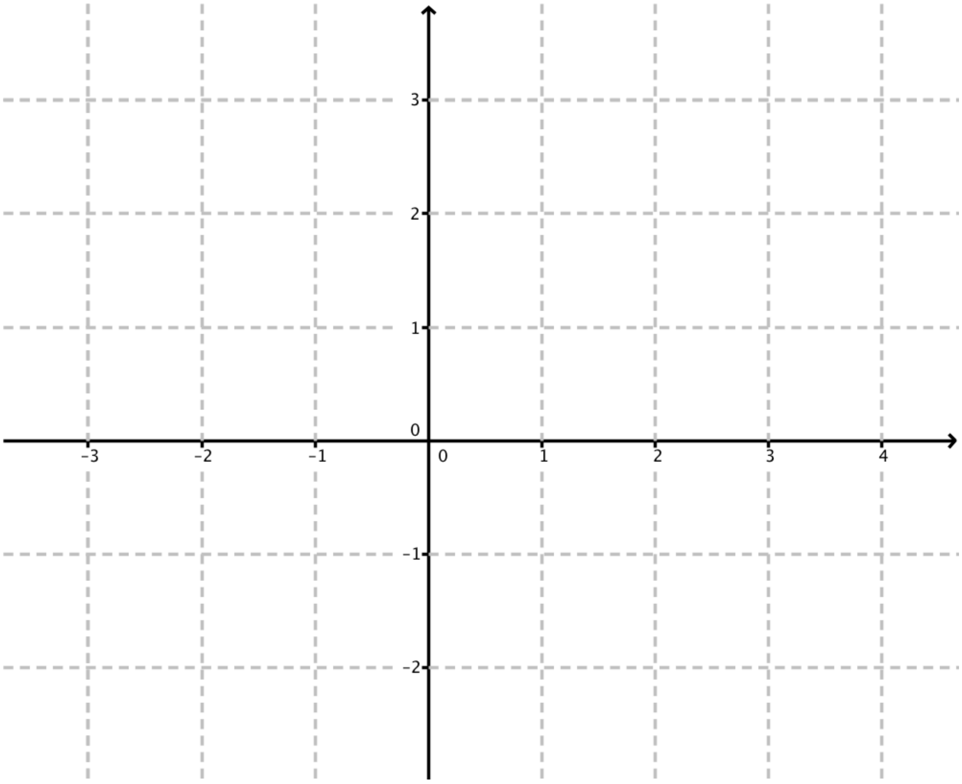
Antwort: $k =$ ____________________, $d =$ ____________________.

Aufgabe 9. (2P) **Funktionen und ihre Ableitungen**.



Betrachten Sie den dargestellten Graphen der Funktion f.

Aufgabenstellung: Skizzieren Sie im unterstehenden Diagramm den Graphen der Ableitung von f' ein! Sie sollten dabei eher auf qualitative Merkmale als quantitative Merkmale achten!



Aufgabe 10. (2P) **Maximum und Minimum**.

Die Funktion $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$ hat erste Ableitung f' und zweite Ableitung f'' gegeben durch

$$f'(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}\,, \qquad f''(x) = \frac{2-6x^2}{(1+x^2)^3}\,.$$

Aufgabenstellung: Bestimmen Sie das Extremum der Funktion f und ob es sich hierbei um ein Maximum oder ein Minimum handelt!

Antwort: Das Extremum befindet sich an der Stelle $x =$___________________ und es betrifft ein Maximum / Minimum. (Durchstreichen was nicht zutrifft.)

Aufgabe 11. (2P) **Funktionsgleichung bestimmen**.

In der Tabelle sind einige Werte der Exponentialfunktion f mit $f(x) = c \cdot a^x$ $(c, a \in \mathbb{R}^+)$ angegeben.

x	$f(x)$
-1	$0,5$
0	2
1	8

Aufgabenstellung: Geben Sie eine Funktionsgleichung dieser Funktion an!

Antwort: Funktionsgleichung $f(x) =$ _____________________________ .

Aufgabe 12. (2P) **Ableitungen und Funktionen**.

Gegeben sind 5 reelle Funktionen.

Aufgabenstellung: Ordnen Sie jeder Funktion die richtige erste Ableitung zu:

$f(x) = \sin(3x)$	
$f(x) = 2\cos(3x)$	
$f(x) = -\sin(3x)$	
$f(x) = 2\sin(3x)$	
$f(x) = -2\cos(3x)$	

A	$f'(x) = -6\sin(3x)$
B	$f'(x) = -3\cos(3x)$
C	$f'(x) = 6\sin(3x)$
D	$f'(x) = 3\cos(3x)$
E	$f'(x) = 6\cos(3x)$
F	$f'(x) = -6\cos(3x)$

Dritte Schularbeit Mathematik Klasse 7A G am 08.03.2016

VERTIEFUNGSTEIL

SCHÜLERNAME: ____________________________________

Aufgabe 1. *Erlös.*

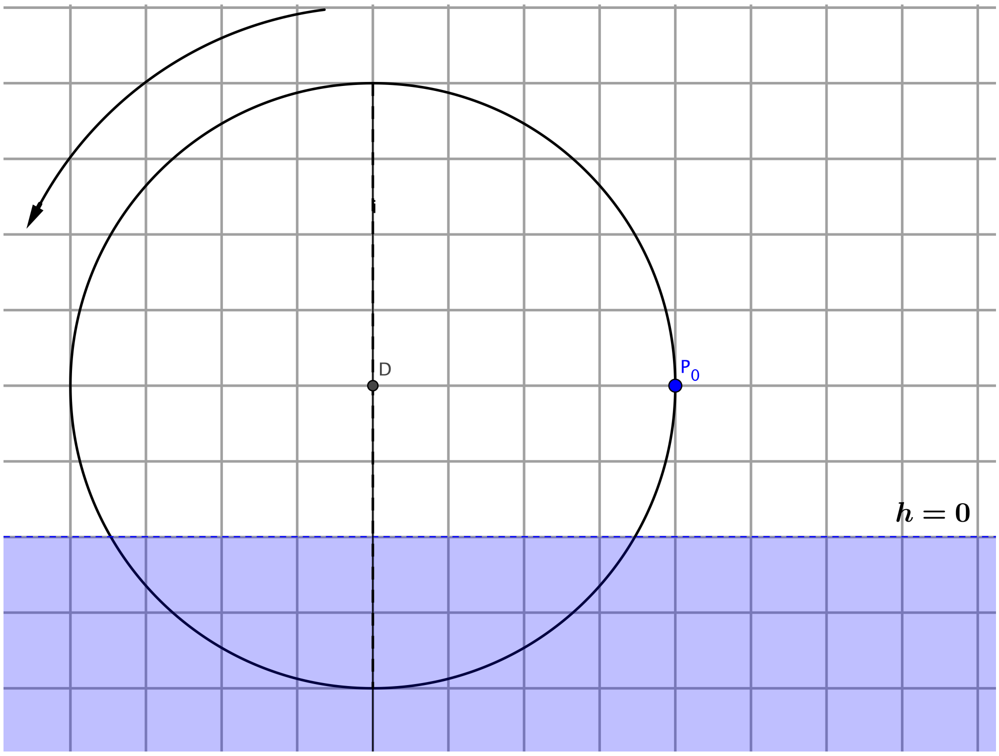
Der Erlös E ist das Produkt aus Verkaufspreis p und der Anzahl n der verkauften Produkte, sodass $E = np$. Die Anzahl der verkauften Produkte ist nicht vom Preis unabhängig, denn um so teurer das Produkt, desto weniger wird man verkaufen können. Nehmen wir an, dass für ein bestimmtes Produkt gilt, dass

$$n(p) = \frac{150.000}{1 + 0,02 \cdot p}$$

(a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass $n(p)$ für $p \in \mathbb{R}^+$ monoton fallend ist.

(b) (2 Punkte) Finden Sie den Preis p_{max} für den der Erlös maximal ist.

Aufgabe 2. *Wasserrad.*



In einem Teich befindet sich ein Rad, das sich entgegen dem Uhrzeigersinn dreht und zum Teil in Wasser eintaucht. Das Rad hat einen Durchmesser von 4 Meter und sein Drehpunkt D befindet sich 1 Meter über der Wasseroberfläche. Ein Punkt P auf dem Rand des Rades befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0$ in der Position P_0, also auf derselben Höhe wie der Drehpunkt. Der Punkt P führt eine volle Umdrehung in 40 Sekunden aus. Die Höhe über dem Wasserspiegel $h(t)$ des Punktes P lässt sich durch eine Formel

$$h(t) = a \cdot \sin(b \cdot t) + c$$

beschreiben. Die Höhe $h = 0$ korrespondiert mit der Wasseroberfläche.

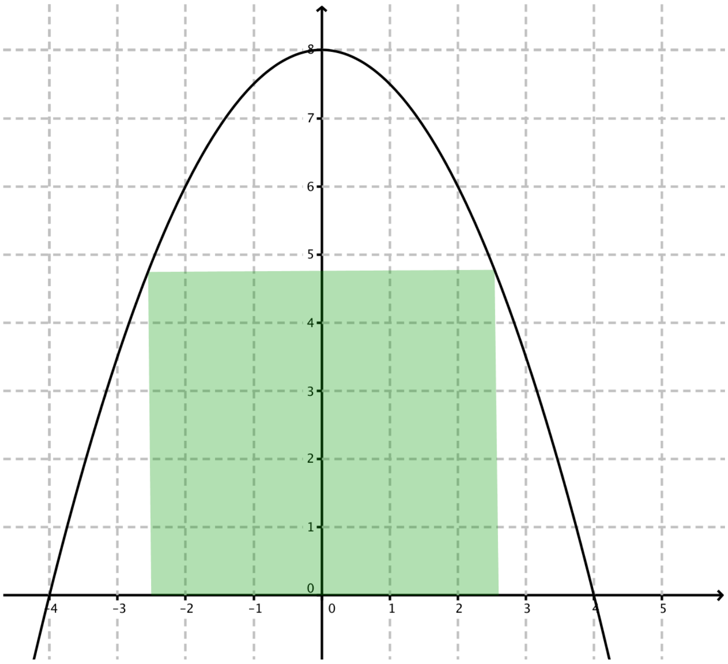
(a) (1 Kompensationspunkt) Bestimmen Sie den Parameter a in der Formel für $h(t)$.

(b) (1 Kompensationspunkt) Bestimmen Sie die Parameter b und c in der Formel für $h(t)$.

(c) (3P) Ermitteln Sie die Geschwindigkeit, mit der die Höhe des Punktes P nach 5 Sekunden zunimmt.

(d) (3P) Ermitteln Sie die Geschwindigkeit, mit der die Höhe abnimmt, wenn der Punkt P ins Wasser eintaucht.

Aufgabe 3. *Großes Rechteck unter Parabel.*



Betrachten Sie die Parabel

$p: \quad y = 8 - \frac{1}{2}x^2.$

Dem Teil der Parabel oberhalb der x-Achse soll ein Rechteck wie in der Abbildung eingeschrieben werden.

(a) (3 Punkte) Wie lang sind die Seiten des Rechtecks zu wählen, damit sein Flächeninhalt maximal ist?

(b) (2 Punkte) Wie lang sind die Seiten des Rechtecks zu wählen, damit sein Umfang maximal ist?

Aufgabe 4. *Umkehrfunktionen.* (2 Punkte)

Betrachten Sie die Funktion $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ mit Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}$.

Aufgabenstellung: Begründen Sie, dass die Funktion f keine Umkehrfunktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitzt.

Aufgabe 5. *Bevölkerungswachstum.*

Das Bevölkerungswachstum eines Landes setzt sich aus zwei Komponenten zusammen. Eine Komponente ist die biologische; die Bevölkerung wächst durch Geburten und nimmt ab durch Sterbefälle - meistens ist die Geburtenrate höher als die Sterberate. Die zweite Komponente betrifft die Migration; Menschen können auswandern (emigrieren) oder eben einwandern (immigrieren). In dieser Aufgabe betrachten wir nur die biologische Komponente.

Nehmen wir an, das Land Trumpistan ist ein Inselstaat und kennt keine Migration, weder Immigration noch Emigration. Dann dürfen wir annehmen, dass die Bevölkerung in gleichen Zeitabschnitten um gleich große Prozentsätze zunimmt. Die Funktion $B(t)$ beschreibe die Einwohneranzahl ab dem Jahr 2016, welches mit $t = 0$ korrespondiert.

(a) (1 Kompensationspunkt) Kreuzen Sie die richtig(st)e Möglichkeit an!

1. ☐	Die Zunahme ΔB ist in kleinen, gleich großen Zeitintervallen gleich groß.
2. ☐	Die relative Zunahme $\frac{\Delta B}{B}$ ist in kleinen, gleich großen Zeitintervallen gleich groß.
3. ☐	Die Funktion B ist annähernd periodisch.

(b) (1 Kompensationspunkt) Kreuzen Sie die Formel an, die $B(t)$ am besten beschreibt!

1. ☐	$B(t) = c \cdot a^t$, mit $c, a \in \mathbb{R}^+$.
2. ☐	$B(t) = kt + d$, mit $k, d \in \mathbb{R}^+$.
3. ☐	$B(t) = p \cdot t^q$, mit p, q reelle Zahlen größer als 1.

(c) (3 Punkte) Gehen wir davon aus, dass im Jahr 2016 das Land Trumpistan 7.500.000 Einwohner hat. Des Weiteren sei gegeben, dass die Einwohneranzahl jedes Jahr um 2,5% zunimmt. Bestimmen Sie, in welchem Jahr das Land 8.000.000 Einwohner hat.