Vierte Schularbeit Mathematik Klasse 7A G am xx.05.2016

SCHÜLERNAME:

Punkte im ersten Teil: ____________________

Punkte im zweiten Teil: ____________________

Davon Kompensationspunkte: ____________________

Note: ____

Notenschlüssel:
Falls die Summe der erzielten Kompensationspunkte im zweiten Teil und der Punkte des ersten Teils weniger als 16 ist, so ist die Note `Nicht Genügend`. Falls diese Summe 16 oder mehr beträgt, dann wird folgender Notenschlüssel benutzt:

NOTENSCHLÜSSEL	
41 - 48 Punkte	Sehr Gut (1)
33 - 40 Punkte	Gut (2)
25 - 32 Punkte	Befriedigend (3)
16 - 24 Punkte	Genügend (4)

Aufgabe 1. (2P) **Umformungen – AG**.

Ein Schüler muss die quadratische Gleichung $x^2 - 17x = 0$ lösen. Er geht wie folgt vor:

(1) $3x^2 - 18x = 0 \qquad | :x$
(2) $3x - 18 = 0 \qquad | +18$
(3) $3x = 18 \quad \Longrightarrow \quad x = 6.$

Aufgabenstellung: Erklären Sie, warum der Schritt von (1) auf (2) keine Äquivalenzumformung ist, und der Schüler somit die Gleichung nicht richtig gelöst hat.

Aufgabe 2. (2P) **Gleichungen und Lösungen – AG/FA**.
Betrachten Sie die quadratische Funktion $f(x) = x^2 - px + 12$. Gegeben ist, dass $f(2) = 0$. Bestimmen Sie den Parameter p und geben Sie die zweite Nullstelle von f an.

$p =$ ________________________

Zweite Nullstelle bei $x =$ ________________________

Aufgabe 3. (2P) **Abnahme – AG/FA**.
Das Computerspiel „Super Dario“ ist mittlerweile schon veraltet. Im Jahr 2000 gab es weltweit noch etwa 25 Millionen Personen, die das Spiel täglich spielten. Das Internationale Spielfonds schätzt, dass die Anzahl der Personen, die das Spiel „Super Dario“ täglich spielen, jedes Jahr etwa 4% abnimmt. Bestimmen Sie, wie viele Jahre es braucht, dass die Anzahl der Personen weltweit, die das Spiel „Super Dario“ täglich spielen, sich auf 15 Millionen reduziert hat.

Antwort: ____

Aufgabe 4. (2P) **Sinusfunktion – FA**.
Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei von der Form $f(x) = a \cdot \cos(b \cdot x)$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}^+$.
Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

1. ☐	Die Funktionswerte von f sind positiv, wenn a positiv ist.
2. ☐	Wenn man a verdoppelt, verdoppelt sich die Periode.
3. ☐	Wenn man b verdoppelt, verdoppelt sich die Periode.
4. ☐	Die Funktion f ist symmetrisch um den Ursprung: $f(-x) = f(x)$.
5. ☐	$f(0) = a$.

Aufgabe 5. (2P) **Parallele Geraden – AG**.
Betrachten Sie die Gerade h in der Ebene $\mathbb{R}^2$ definiert durch

$$h : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot t\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,,$$

Bestimmen Sie für welchen Wert von a, die Gerade g, definiert durch $g:\ 4x + ay = 0$ ist, parallel zu h ist.

g und h sind parallel, wenn $a =$ ________________________

Aufgabe 6. (2P) **Hausaufgaben – WS**.
Ein Mathematiklehrer kontrolliert jede Unterrichtsstunde bei 3 Personen die Hausaufgaben. In einer Klasse von 16 Schülern haben an einem Dienstag zwei Schüler die Hausaufgaben nicht gemacht. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der der Mathematiklehrer bei den beiden Schülern, die die Hausaufgaben nicht gemacht haben, die Hausaufgaben kontrolliert.

Antwort: ________________________.

Aufgabe 7. (2P) **Arithmetisches Mittel und empirische Standardabweichung**.
Gegeben sind der Mittelwert $\overline{x}$ und die empirische Standardabweichung s der Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_{20}$. Wie ändern sich der Mittelwert $\overline{x}$ und die empirische Standardabweichung s, wenn jeder Datenwert $x_1, x_2, \ldots, x_{20}$ mit der Zahl $z \in \mathbb{R}^+$ multipliziert wird? Kreuzen Sie die korrekte Antwort an!

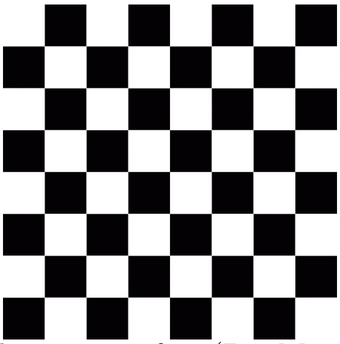
1. ☐	$\overline{x}$ und s bleiben gleich.
2. ☐	$\overline{x}$ wird mit z multipliziert und s bleibt gleich.
3. ☐	$\overline{x}$ wird mit z multipliziert und s wird mit $\sqrt{z}$ multipliziert.
4. ☐	$\overline{x}$ und s werden jeweils mit z multipliziert.
5. ☐	$\overline{x}$ bleibt gleich und s wird mit z multipliziert.
6. ☐	$\overline{x}$ wird mit z multipliziert und s wird mit z^2 multipliziert.

Aufgabe 8. (2P) **Würfelspiel – WS**.
Betrachten wir folgendes Würfelspiel: Eine Person würfelt mit einem ehrlichen Spielwürfel so lange, bis er drei Sechser gewürfelt hat. Diese Person hat gewonnen, wenn sie weniger als 7 Würfe gebraucht hat, die drei Sechser zu würfeln. Anderenfalls verliert die Person. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit P auf Gewinn.

$P =$________________________

Aufgabe 9. (2P) **Ereignisse kombinieren – WS**.

Bei einem Schachbrett sind 64 quadratisch angeordnet, sodass das Brett 8 Felder breit und 8 Felder lang ist. Die Hälfte der Felder ist weiß, die andere Hälfte ist schwarz. Zwei Felder, die eine gemeinsame Kante haben, haben eine unterschiedliche Farbe. (Siehe auch Figur.)



Eine Münse wird auf willkürliche Weise auf das Schachbrett geworfen. (Die Münze fällt nicht vom Brett und sie liegt auch immer eindeutig auf einem bestimmten Feld.)
Sei A das Ereignis, die Münze landet auf einem weißen Feld, und sei B das Ereignis, die Münze landet auf einem Feld am Rand des Feldes.
Kreuzen Sie die richtigen Aussagen an!

1. ☐	$P(A) \geq P(B)$.
2. ☐	$P(A \cup B) \leq P(B)$.
3. ☐	$P(A \cap B) \leq P(B)$.
4. ☐	$P(A) + P(B) = 1$.
5. ☐	$P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Aufgabe 10. (2P) **Gewinnspiel – WS**.
Betrachten Sie folgendes Gewinnspiel: Um sich an das Spiel zu beteiligen, muss man 10 Euro zahlen. Dann zieht man drei Kugeln hinter einander und ohne Zurücklegen aus einer Urne mit 5 goldenen Kugeln und 15 schwarzen Kugeln. Sind alle drei Kugeln goldene, so ist der Gewinn 100 Euro; sind zwei deiner Kugeln goldene, so ist der Gewinn 25 Euro, ist eine deiner Kugeln eine goldene, so bekommt man die 10 Euro zurück. Ist keine Kugel eine goldene, so gewinnt man nichts.

Berechnen Sie Erwartungswert $E(X)$ des Gewinns X bei diesem Spiel.

$E(X) =$ ________________________ (Euro)

Aufgabe 11. (2P) **Varianz und Erwartungswert– WS**.
Die stochastische Variable X nehme nur die Werte 0 und 1 an, und $P(X = 1) = p$ und $P(X = 0) = 1 - p$.
Gegeben ist, dass $E(X) = 1$. Bestimmen Sie p und $Var(X)$.

$p =$____________________________ und $\sigma_X^2 = Var(X) =$____________________________

Aufgabe 12. (2P) **Lineare Funktion – FA**.
Gegeben ist die lineare Funktion $f(x) = kx + d$ mit $k, d \in \mathbb{R}$. Des Weiteren ist bekannt, dass $f(2) = 6$ und $f(10) = 42$.
Kreuzen Sie die richtigen Aussagen an!

1. ☐	$f(x + 1) = f(x) + 4,5$.
2. ☐	$f(0) = -3$.
3. ☐	f beschreibt eine direkte Proportionalität.
4. ☐	$f(6) = 30$.
5. ☐	f hat eine Nullstelle im Intervall $[0; 2]$.

Vierte Schularbeit Mathematik Klasse 7A G am xx.05.2016

TEIL 2

SCHÜLERNAME:

Aufgabe 1. *Kreise und Ellipse* (8 Punkte)

Gegeben ist die Ellipse $E:\ x^2+4y^2=16$. Es sei g die Gerade $g_t:\ y=\frac{1}{2}\cdot x+t$ mit $t\in\mathbb{R}$.

(a) (1 Ausgleichspunkt) Bestimmen Sie die Werte von t, für welche g_t genau einen gemeinsamen Punkt mit E hat.

(2 Punkte) Fertigen Sie eine Skizze an und verdeutlichen Sie die geometrische Deutung der Geraden g_t, die genau einen Punkt mit E gemeinsam haben.

(b) (3 Punkte) Die Kreise $K_r:\ x^2+y^2=r^2$ mit $r\in\mathbb{R}^+$ haben für verschiedene Werte von r eine unterschiedliche Anzahl von gemeinsamen Punkten mit E.

Bestimmen Sie die Schnittpunkte von E mit den Koordinatenachsen. Drücken Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von K_r mit den Koordinatenachsen in r aus. Bestimmen Sie die Anzahl der gemeinsamen Punkte von E und K_r in Abhängigkeit von r.

(c) Für jeden Punkt $P=(x_P|y_P)$ auf E gibt es einen Winkel $\alpha_P\in[0;2\pi)$, sodass

$$x_P=4\cos(\alpha_P)\qquad y_P=2\sin(\alpha_P)\,.$$

(1 Ausgleichspunkt) Interpretieren Sie den Winkel α_P für einen Punkt $P\in E$ geometrisch!

Der Punkt $A=(4|0)$ liegt auf der Ellipse E. Finden Sie einen Punkt P auf der Ellipse, sodass das Dreieck $\triangle OAP$ ein gleichschenkliges Dreieck ist und bestimmen Sie sein Flächeninhalt. (Beachte, O ist der Ursprung des Koordinatensystems.)

Aufgabe 2. *Kriminelle Neigungen.*

Es gibt viele Theorien darüber, was aus einem Menschen einen Kriminellen macht. Manche Theorien gehen davon aus, dass kriminelles Verhalten angeboren ist. Ein Sozialforscher schätzt, dass im Schnitt einer auf 12 Menschen im Laufe der Zeit kriminelles Verhalten entwickelt. In dieser Aufgabe gehen wir davon aus, dass der Sozialforscher recht hat.

(a) (1 Ausgleichspunkt) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Gruppe von 10 willkürlich augewählten Menschen mindestens eine Person kriminelles Verhalten entwickelt.

(b) (6 Punkte) Sei X die Anzahl der Personen in einer Gruppe von 10 willkürlich ausgewählten Personen, die kriminelles Verhalten entwickeln. Geben Sie einen geeigneten Ereignisraum an, geben Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(X = k)$ für $0 \leq k \leq 10$ und stellen Sie diese Graphisch dar. Berechnen Sie $E(X)$ und $Var(X)$ und interpretieren Sie $E(X)$ im Kontext!

(c) (2 Punkte) Wie groß muss eine Gruppe zufällig ausgewählter Personen sein, damit wir mit 99%-iger Wahrscheinlichkeit mindestens eine kriminelle Person dabei haben?

Aufgabe 3. *Wiederholungen.*

Ein Computer erzeugt per Zufall ein Wort von 4 Buchstaben aus den Buchstaben A, B und C. Es liegt eine Wiederholung vor, wenn zwei auf einander folgende Buchstaben gleich sind. So gibt es bei $ABBC$ eine Wiederholungen, und bei $AAAC$ zwei. Es sei X die Anzahl der Wiederholungen.

(a) (1 Ausgleichspunkt) Geben Sie eine geeignete Menge an, welche die möglichen Werte von X beschreibt. (Achtung, du sollst die kleinstmögliche Menge nehmen. Die Menge $\mathbb{R}$ ist zum Beispiel zu groß.)

(b) (2 Punkte) Berechnen Sie $E(X)$ und $Var(X)$.

Aufgabe 4. *Willkürliche Parabeln*

In dieser Aufgabe betrachten wir willkürliche Parabeln, aber doch noch nicht so wild, dass sie komplett willkürlich sind. Sehr konkret betrachten wir Parabeln mit Funktionsgleichungen

$$y = ax^2 + 2bx + c\,.$$

Die Parameter a, b und c sind hierbei durch Zufall bestimmt. Die Anzahl der Nullstellen hängt somit auch vom Zufall ab!

(a) (1 Punkt) Formulieren Sie eine Bedingung, die a, b und c erfüllen müssen, damit die Zufallsparabel (i) null Nullstellen, (ii) eine Nullstelle oder (iii) zwei Nullstellen hat!

Die Parameter a, b und c können alle drei die Werte ± 1 annehmen, sie sind unabhängig von einander und es gilt $P(a = \pm 1) = P(b = \pm 1) = P(c = \pm 1) = \frac{1}{2}$.

(b) (3 Punkte) Es sei X die Anzahl der Nullstellen. Berechnen Sie $P(X = 0)$, $P(X = 1)$, $P(X = 2)$ und $E(X)$. (Hinweis: Fertigen Sie eine Tabelle an!)

Ich wünsche dir viel Erfolg und freue mich schon auf eine gute Zusammenarbeit im nächsten, für dich letzten, Schuljahr!!!