Dritte Schularbeit Mathematik Klasse 7A G am 31.03.2016
Wiederholung für Abwesende

SCHÜLERNAME: ______________________________

Punkte im Basisteil: ______________ / 24

Punkte im Vertiefungsteil: ______________ /24

Davon Kompensationspunkte: ______________ /4

Note: ______________________________

Notenschlüssel:
Falls die Summe der erzielten Kompensationspunkte im Vertiefungsteil und der erzielten Punkte des Basisteils weniger als 16 ist, so ist die Note `Nicht Genügend`. Falls diese Summe 16 oder mehr beträgt, dann wird folgender Notenschlüssel benutzt:

NOTENSCHLÜSSEL	
41 - 48 Punkte	Sehr Gut (1)
33 - 40 Punkte	Gut (2)
25 - 32 Punkte	Befriedigend (3)
16 - 24 Punkte	Genügend (4)

Aufgabe 1. (2P) **Funktionen mit Potenzen**.

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 3^{5x}$.

Aufgabenstellung: Ermitteln Sie die Bruchzahl x, sodass $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ und schreiben Sie das Ergebnis in der Form $x = \frac{a}{b}$ mit a und b ganze Zahlen.

$x =$____________________

Aufgabe 2. (2P) **Cosinusfunktion**.

Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 3 \cdot \cos(\pi x)$.

Aufgabenstellung: Kreuzen Sie die zutreffende(n) Aussage(n) an:

1. ☐	Die Funktion f hat im Intervall $[0; 1]$ genau eine Nullstelle.
2. ☐	Die Funktion f hat ein Maximum an der Stelle $x = 0$.
3. ☐	$f(k) = 3$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.
4. ☐	Die Funktion f ist monoton fallend.
5. ☐	Die Steigung von f an der Stelle $x = 0$ beträgt 0.

Aufgabe 3. (2P) **Sinusfunktion**.

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 3 \cdot \sin\left(\frac{7\pi}{15} \cdot x\right)$.

Aufgabenstellung: Bestimmen Sie die Periode von f und die Steigung der Tangente an der Stelle $x = 0$.

Antwort:

Periode = ____________________,

Steigung der Tangente bei $x = 0$ beträgt: ____________________.

Aufgabe 4. (2P) **Sekante und Tangente einer Parabel**.
Gegeben ist die Parabel $y = \frac{x^2}{3} + 2x$ und die Punkte $A = (0|0)$ und $B = (6|24)$ auf der Parabel.

Bestimmen Sie die Koordinaten des (einzigen) Punktes C auf der Parabel, in dem die Tangente zur Parabel parallel zur Sekante durch A und B ist.

$C =$ ____________________ (zwei Koordinaten!)

Aufgabe 5. (2P) **Halbwertszeit**.

Ein Physiker misst die Menge eines radioaktiven Stoffes. Der Zerfall gehorcht dem Gesetz $N(t) = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{t/\tau}$, wobei N_0 die Anfangsmenge zur Zeit $t = 0$ und τ die Halbwertszeit (in Tagen) ist. Die Ergebnisse sind teilweise in der Tabelle dargestellt:

Zeit (Tage)	0	1	2	3
Menge (Gramm)	200	180	162	

Aufgabenstellung: Ergänzen Sie die Tabelle und bestimmen Sie die Halbwertszeit τ (in Tagen).

Antwort:

$\tau =$ ____________________ Tage,

Fehlender Wert in der Tabelle = ____________.

Aufgabe 6. (2P) **Ableitungen und Extremum**.

Betrachten Sie die Funktion $f(x) = x^2 e^{-ax}$ mit $a > 0$.

Aufgabenstellung: Bestimmen Sie den Wert von a so, dass f ein Extremum an der Stelle $x = 2$ hat.

Antwort: $a =$ ________________.

Aufgabe 7. (2P) **Indirekt Proportional zu einander**
Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beschreibe eine **indirekte Proportionalität**. Das heißt, dass $f(x)$ indirekt proportional zu x ist.

Aufgabenstellung: Kreuzen Sie die richtigen 2 Aussagen an!

1. ☐	Der Graph von f geht durch den Ursprung.
2. ☐	Das Produkt $x \cdot f(x)$ ist für alle x gleich.
3. ☐	Das Verhältnis $f(x) : x$ ist für alle x gleich.
4. ☐	Der Graph von f ist eine Hyperbel.
5. ☐	$f(x+1) - f(x)$ ist unabhängig von x, also, für alle x gleich.

Aufgabe 8. (2P) **Differenzierregeln**.
Gegeben ist die Funktion $f(x) = 5x^3 + 5\cos(\pi x)$.

Aufgabenstellung: Kreuzen Sie die richtigen 2 Aussagen an!

(1) ☐	$f(0) = 5$
(2) ☐	$f'(0) = -5\pi$
(3) ☐	$f'(\pi) = 15\pi^2$
(4) ☐	$f(1) = 5$
(5) ☐	$f''(0) = -5\pi^2$

Aufgabe 9. (2P) **Lineare Funktionsgleichung**.

Die Funktion $f(x) = xe^x$ geht durch den Punkt $(1|e)$. Der Graph der linearen Funktion $h(x) = kx + d$ berührt den Graphen von f im Punkt $(1|e)$ und daher ist der Graph von h eine Tangente von f im Punkt $(1|e)$.

Aufgabenstellung: Bestimmen Sie die Parameter k und d in der Funktionsgleichung von h.

Antwort: $k =$ ____________________, $d =$ ____________________.

Aufgabe 10. (2P) **Funktionen und ihre Ableitungen**.
Betrachten Sie die Funktion $f(x) = x^3 + ax + 5$ wobei $a \in \mathbb{R}$. Davon abhängig, welchen Wert a hat, hat diese Funktion (i) zwei Extremstellen und einen Terrassenpunkt, (ii) einen Terrassenpunkt und keine Extremstellen, oder (iii) sie ist monoton steigend.

Aufgabenstellung: Bestimmen Sie die Werte von a, sodass f monoton steigend ist!

Antwort: ____

Aufgabe 11. (2P) **Maximum und Minimum**.
Die Funktion $f(x) = \frac{e^x}{x+2}$ hat erste Ableitung f' und zweite Ableitung f'' gegeben durch

$$f'(x) = \frac{(x+1)e^x}{(x+2)^2}, \qquad f''(x) = \frac{e^x(x^2+2x+2)}{(x+2)^3}.$$

Aufgabenstellung: Bestimmen Sie das Extremum der Funktion f und ob es sich hierbei um ein Maximum oder ein Minimum handelt!

Antwort: Das Extremum befindet sich an der Stelle $x =$____________________ und es betrifft ein Maximum / Minimum. (Durchstreichen was nicht zutrifft.)

Aufgabe 12. (2P) **Ableitungen und Funktionen**.

Gegeben sind 5 reelle Funktionen.

Aufgabenstellung: Ordnen Sie jeder Funktion die richtige erste Ableitung zu:

$f(x) = e^{3x}$	
$f(x) = 3e^{3x}$	
$f(x) = 3^x$	
$f(x) = -e^{-3x}$	
$f(x) = -3^{-x}$	

A	$f'(x) = \ln(3) \cdot 3^x$
B	$f'(x) = -\ln(3) \cdot 3^{-x}$
C	$f'(x) = \ln(3) \cdot 3^{-x}$
D	$f'(x) = 9e^{3x}$
E	$f'(x) = 3e^{-3x}$
F	$f'(x) = 3e^{3x}$

Dritte Schularbeit Mathematik Klasse 7A G am 31.03.2016

Wiederholung für Abwesende

VERTIEFUNGSTEIL

SCHÜLERNAME: ____

Aufgabe 1. *Kubische Funktionen.*

Betrachten wir kubische Funktionen von der Form $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$, wobei $a < b < c$ drei unterschiedliche, reelle Zahlen sind.

(a) (1 Kompensationspunkt) Bestimmen Sie die drei Nullstellen von f.

(b) (4P) Durch Ausmultiplizieren findet man $f(x) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ac)x - abc$. Bestimmen Sie $f'(x)$ und bestimmen Sie die Diskriminante D der quadratischen Gleichung $f'(x) = 0$. Begründen Sie, dass diese Diskriminante D größer als Null ist. Drücken Sie die Extremstellen von f in a, b, c und D aus.

Hinweis: Die Identität $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ac$ ist hilfreich.

(c) (2P) Bestimmen Sie $f''(x)$ und die Wendestelle von f.

(d) (2P) Sei jetzt $b = 0$ und $a = -2c = -2$. Finden Sie den Punkt P auf dem Graphen von f, in dem die Tangente parallel zur Tangente im Punkt $Q = (-2|0)$ ist, und wobei $P \neq Q$.

Aufgabe 2. *Ventil eines Autos.*

Ein Auto fährt mit konstanter Geschwindigkeit über eine ebene Straße. Wir betrachten jetzt eines seiner Räder. Dieses Rad rollt also mit einer konstanten Geschwindigkeit und somit ist die Anzahl der Umdrehungen pro Sekunde konstant. Der Durchmesser des Rads ist 75cm. Das Ventil befindet sich auf 30cm des Mittelpunktes des Rads. Das Rad dreht sich in $0,2$ Sekunden einmal um die Achse.
Die Höhe $h(t)$ (in Centimeter) des Ventils über der Straße in Abhängigkeit der Zeit t (in Sekunden) kann durch eine Formel

$$h(t) = a \cdot \sin(b \cdot t) + c$$

beschreiben. Die Höhe $h = 0$ korrespondiert mit der Oberfläche der Straße.

(a) (1 Kompensationspunkt) Bestimmen Sie den Parameter a in der Formel für $h(t)$.

(b) (1 Kompensationspunkt) Bestimmen Sie die Parameter b und c in der Formel für $h(t)$.

(c) (2P) Ermitteln Sie eine Formel für die vertikale Geschwindigkeit $v_y(t)$ des Ventils (in cm/s).

(d) (2P) Ermitteln Sie die Geschwindigkeit, mit der das Auto fährt (in cm/s oder m/s).

(e) (2P) Ermitteln Sie eine Formel für die horizontale Geschwindigkeit $v_x(t)$ des Ventils (in cm/s).

(f) (2P) Benutzen Sie Ihre Antwort bei (e) um eine Formel für die Größe der Gesamtgeschwindigkeit (also das Tempo) des Ventils zu bestimmen. Falls Sie (e) nicht haben, nehmen Sie $v_x(t) = 10 + 100 \sin(bt)$, wobei b aus (b) zu entnehmen ist.

Aufgabe 3. *Maximaler Winkel.*

Gegeben sind die zwei Punkte $A = (3|0)$ und $B = (4|0)$ und es bezeichne O den Ursprung des Koordinatensystems. Von einem Punkt $C = (0|c)$ auf der zweiten Achse sieht man die Strecke AB unter einem Winkel α. Betrachten wir das Dreieck $\triangle AOC$, so gilt

$$\tan(\angle OCA) = \frac{3}{c}, \quad \angle OCA = \arctan\left(\frac{3}{c}\right)$$

Betrachten wir das Dreieck $\triangle BOC$ so gilt

$$\tan(\angle OCB) = \frac{4}{c}, \quad \angle OCB = \arctan\left(\frac{4}{c}\right).$$

(a) (1 Kompensationspunkt) Finde eine Beziehung zwischen α und c. M.a.W. geben Sie einen Term für α in der Variable c an!
(b) (2 Punkte) Finden Sie den Punkt C auf dem positiven Teil der zweiten Achse (sodass also $c > 0$), unter dem die Strecke AB am größten gesehen wird.

Hinweis: Die erste Ableitung der Funktion $f(x) = \arctan(x)$ ist $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, wobei Winkel selbstverständlich in Bogenmaß gemessen werden.

Aufgabe 4. *Umkehrfunktionen*

Die Funktion $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ ist definiert durch

$$f(x) = xe^x .$$

(2P) Entscheiden Sie, ob die Funktion f eine Umkehrfunktion $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ besitzt. Begründen Sie Ihre Entscheidung!