

# Wiederholungsprüfung Mathematik Klasse 7A G am 05.09.2016

**SCHÜLERNAME:** \_\_\_\_\_

Punkte im Basisteil: \_\_\_\_\_ / 24

Punkte im Vertiefungsteil: \_\_\_\_\_ /24

Davon Kompensationspunkte: \_\_\_\_\_ /4

Note: \_\_\_\_\_

## Notenschlüssel:

Falls die Summe der erzielten Kompensationspunkte im Vertiefungsteil und der erzielten Punkte des Basisteils weniger als 16 ist, so ist die Note **Nicht Genügend**. Falls diese Summe 16 oder mehr beträgt, dann wird folgender Notenschlüssel benutzt:

NOTENSCHLÜSSEL	
41 - 48 Punkte	Sehr Gut (1)
33 - 40 Punkte	Gut (2)
25 - 32 Punkte	Befriedigend (3)
16 - 24 Punkte	Genügend (4)

**Aufgabe 1. (2P) Potenzen – AG**

**Aufgabenstellung:** Ermitteln Sie die rationale Zahl  $q$ , sodass  $100^q = \sqrt[3]{1000}$  und schreiben Sie  $q$  in die Form  $\frac{a}{b}$ , wobei  $a, b$  natürliche Zahlen sind.

$q =$  \_\_\_\_\_

**Aufgabe 2. (2P) Cosinusfunktion – FA**

Gegeben ist die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = 2,5 \cdot \cos(x)$ .

**Aufgabenstellung:** Kreuzen Sie die 2 zutreffenden Aussagen an:

1. <input type="checkbox"/>	Die Funktion $f$ hat genau eine Nullstelle im Intervall $[0; 2\pi]$ .
2. <input type="checkbox"/>	$f(x + \pi) = -f(x)$ .
3. <input type="checkbox"/>	$f(0) = 0$ .
4. <input type="checkbox"/>	Die Funktion $f$ ist monoton fallend.
5. <input type="checkbox"/>	Die Steigung von $f$ an der Stelle $x = 0$ beträgt 0.

**Aufgabe 3. (2P) Proportional zu einander – FA**

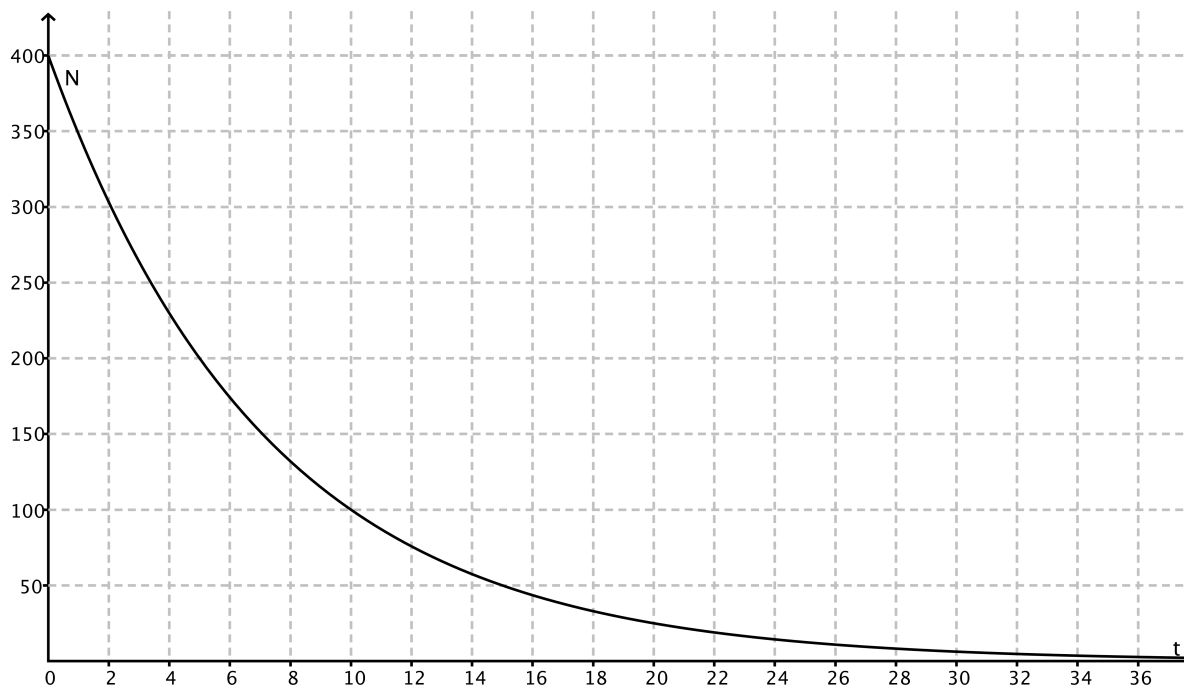
Die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  beschreibe eine direkte Proportionalität. Das heißt, dass  $f(x)$  direkt proportional zu  $x$  ist.

**Aufgabenstellung:** Kreuzen Sie die richtigen 2 Aussagen an!

1. <input type="checkbox"/>	Der Graph von $f$ geht durch den Ursprung.
2. <input type="checkbox"/>	Das Produkt $x \cdot f(x)$ ist für alle $x$ gleich.
3. <input type="checkbox"/>	Die zweite Ableitung $f''$ von $f$ ist positiv; $f''(x) > 0$ für alle $x$ .
4. <input type="checkbox"/>	Der Graph von $f$ ist eine Hyperbel.
5. <input type="checkbox"/>	$f(x + 1) - f(x)$ ist unabhängig von $x$ , also, für alle $x$ gleich.

**Aufgabe 4. (2P) Halbwertszeit – FA.**

Im unterstehenden Diagramm ist die Menge  $N(t)$  der noch nicht zerfallenen Atome eines radioaktiven Elements (in Gramm) als Funktion der Zeit  $t$  dargestellt (in Tagen). Der Zerfall gehorcht dem Gesetz  $N(t) = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{t/\tau}$ , wobei  $N_0$  die Anfangsmenge zur Zeit  $t = 0$  und  $\tau$  die Halbwertszeit (in Tagen) ist.



**Aufgabenstellung:** Bestimmen Sie die Halbwertszeit  $\tau$ .

**Antwort:**  $\tau =$  \_\_\_\_\_.

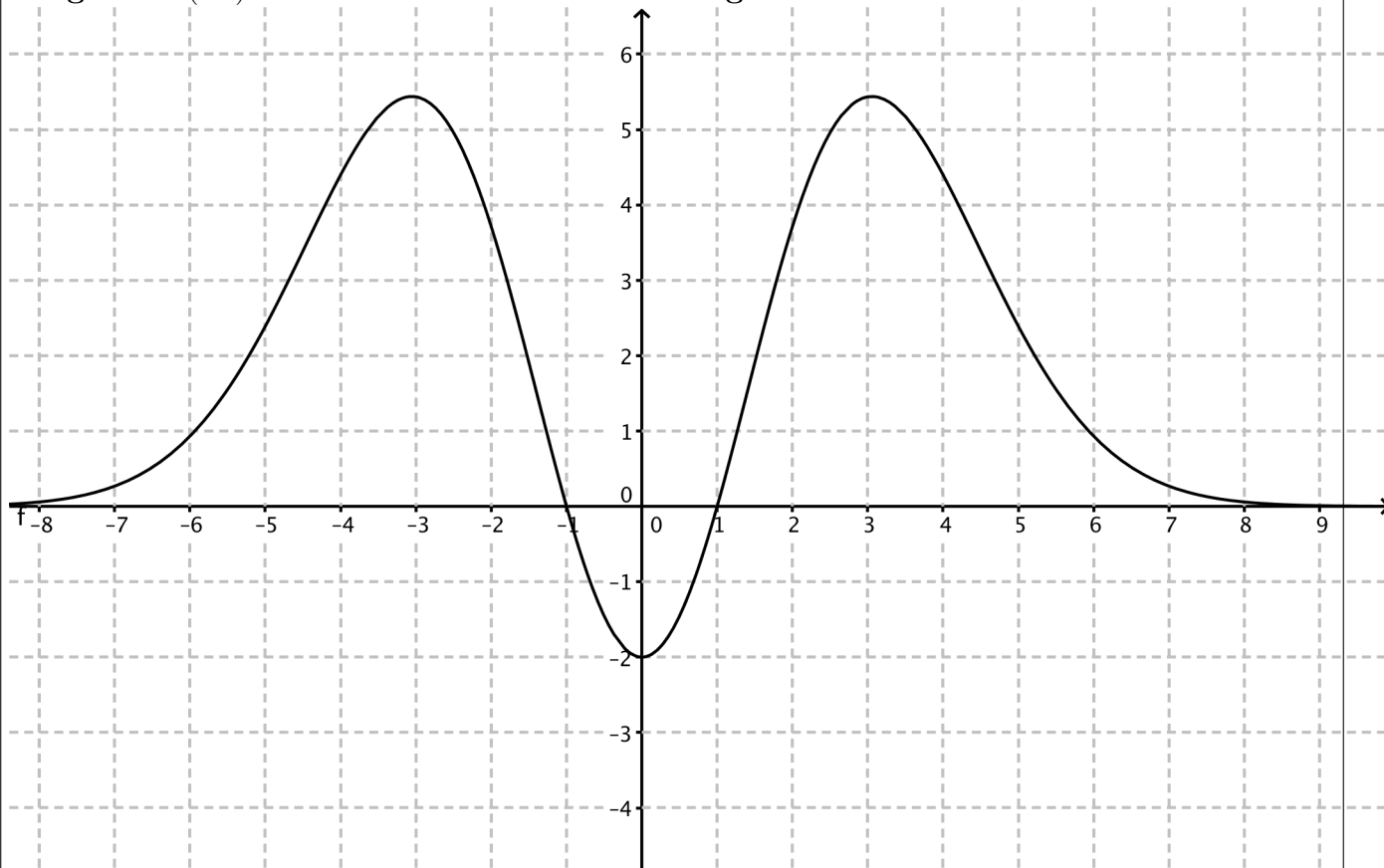
**Aufgabe 5. (2P) Lineare Funktion – FA.**

Gegeben ist die lineare Funktion  $f(x) = kx + d$  mit  $k, d \in \mathbb{R}$ . Des Weiteren ist bekannt, dass  $f(2) = 0$  und  $f(10) = 12$ .

Kreuzen Sie die richtige(n) Aussage(n) an!

1. <input type="checkbox"/>	$k$ ist negativ.
2. <input type="checkbox"/>	$f(0) = -3$ .
3. <input type="checkbox"/>	$f$ beschreibt eine direkte Proportionalität.
4. <input type="checkbox"/>	$f(6) = 8$ .
5. <input type="checkbox"/>	$f$ hat eine Nullstelle im offenen Intervall $(0; 2)$ .

**Aufgabe 6. (2P) Funktionen und ihre Ableitungen –AN**



Betrachten Sie den dargestellten Graphen der Funktion  $f$ .

**Aufgabenstellung:** Skizzieren Sie in derselben Figur den Graphen der Ableitung von  $f'$  ein! Sie sollten dabei eher auf qualitative Merkmale als quantitative Merkmale achten!

**Aufgabe 7. (2P) Ableitungen und Funktionen – AN**

Gegeben sind 5 reelle Funktionen.

**Aufgabenstellung:** Ordnen Sie jeder Funktion die richtige erste Ableitung zu:

$f(x) = \sin(3x)$	
$f(x) = 2 \cos(3x)$	
$f(x) = -\sin(3x)$	
$f(x) = 2 \sin(3x)$	
$f(x) = -2 \cos(3x)$	

A	$f'(x) = -6 \sin(3x)$
B	$f'(x) = -3 \cos(3x)$
C	$f'(x) = 6 \sin(3x)$
D	$f'(x) = 3 \cos(3x)$
E	$f'(x) = 6 \cos(3x)$
F	$f'(x) = -6 \cos(3x)$

**Aufgabe 8. (2P) Zahlenmengen – AG**

Es folgen Aussage über Zahlenmengen. Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

<input type="checkbox"/>	$2 \cdot 10^{-3}$ ist eine ganze Zahl.
<input type="checkbox"/>	$i \cdot (i + 1)$ liegt in $\mathbb{C}$ und nicht in $\mathbb{R}$ .
<input type="checkbox"/>	$\sqrt{5}$ liegt nicht in $\mathbb{Q}$ .
<input type="checkbox"/>	Das Quadrat einer complexen Zahl liegt in $\mathbb{R}$ .
<input type="checkbox"/>	$1,21 \cdot 10^2$ liegt in $\mathbb{Q}$ und nicht in $\mathbb{N}$ .

**Aufgabe 9. (2P) Äquivalente Terme – AG**

Gegeben sind vier Terme. Ordnen Sie jedem Term in der linken Tabelle den passenden äquivalenten Term aus der rechten Tabelle zu!

Linke Tabelle	
$(x + y)(x - y)^{-1}$	
$x - y^{-1}$	
$(x + y)(x + y)^{-1}$	
$x \cdot (x + y)^{-1}$	

Rechte Tabelle	
<b>A</b>	$\frac{xy-1}{y}$
<b>B</b>	$\frac{x}{x+y}$
<b>C</b>	$x + y$
<b>D</b>	1
<b>E</b>	$x^2 - y^2$
<b>F</b>	$\frac{x+y}{x-y}$

**Aufgabe 10. (2P) Quotienten – AN**

Gegeben ist eine differenzierbare Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . (M.a.W.  $f'$  existiert.) Kreuzen Sie die korrekte(n) Aussage(n) an!

<input type="checkbox"/>	$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$
<input type="checkbox"/>	$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ ist ein Differenzenquotient.
<input type="checkbox"/>	$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ ist ein Differentialquotient.
<input type="checkbox"/>	$f(x) = \lim_{z \rightarrow x} \frac{f'(z) - f'(x)}{z - x}$ .
<input type="checkbox"/>	$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

**Aufgabe 11. (2P) Parallele Geraden – AG.**

Betrachten Sie die Gerade  $h$  in der Ebene  $\mathbb{R}^2$  definiert durch  $h : 3x - 4y = 7$ .

Bestimmen Sie für welchen Wert von  $a$ , die Gerade  $g$ , welche durch  $(0|0)$  geht und durch die Parameterdarstellung definiert

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 5 \end{pmatrix} \cdot t, \quad t \in \mathbb{R},$$

ist, parallel zu  $h$  ist.

$g$  und  $h$  sind parallel, wenn  $a =$  \_\_\_\_\_

**Aufgabe 12. (2P) Gewinnspiel – WS.**

Betrachten Sie folgendes Gewinnspiel: Aus einer Schachtel muss blind eine Kugel gezogen werden. In dieser Schachtel ist eine goldene Kugel, zwei silberne Kugeln und drei bronzene Kugeln und 14 weiße Kugeln. Zieht diese Person eine goldene Kugel, so gewinnt sie 100 Euro; zieht sie eine silberne Kugel, so gewinnt sie 25 Euro; zieht sie eine bronzene Kugel, so gewinnt sie 15 Euro; zieht sie eine weiße Kugel, so gewinnt sie nichts. Um an das Spiel teilzunehmen, muss 10 Euro gezahlt werden.

Berechnen Sie Erwartungswert  $E(X)$  des Gewinns  $X$  bei diesem Spiel.

$E(X) =$  \_\_\_\_\_

Wiederholungsprüfung Mathematik Klasse 7A G am 05.09.2016

**VERTIEFUNGSTEIL**

**SCHÜLERNAME:** \_\_\_\_\_

**Aufgabe 1. Würfeltricks.**

Bei einem Würfelspiel wird mit zwei ehrlichen Spielwürfeln geworfen. Sei  $X$  die Augenzahl der einen Würfel und  $Y$  die Augenzahl der zweiten Würfel. Der erzielte Gewinn  $W$  wird dann wie folgt berechnet

$$W = 6X + Y - 7.$$

(a) (1 Ausgleichspunkt) Geben Sie einen geeigneten Ereignisraum für  $W$ . Mit anderen Worten, geben Sie eine Menge an, die alle möglichen Gewinne angibt.

(b) (3 Punkte) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass  $W = 0$ . Berechnen Sie den Erwartungswert von  $W$ .

**Aufgabe 2. Funktion**

Betrachten Sie die Funktion  $f(x) = \frac{5}{2+x}$ .

(a) (1 Ausgleichspunkt) Geben Sie die größtmögliche Definitionsmenge an!

(1 Punkt) Fertigen Sie einen Graphen von  $f$  an!

(b) (5 Punkte) Bestimmen / Besprechen Sie: Anzahl der Nullstellen, Asymptoten, Monotonieverhalten, Krümmungsverhalten und Anzahl der Extremstellen.

**Aufgabe 3. Teams wählen.**

In einer Klasse sind 24 Schüler – 11 Buben und 13 Mädchen. Der Sportlehrer muss für einen Leichtathletikwettbewerb 5 Personen aus der Klasse auswählen, die dann als Team zum Wettbewerb fahren. Alle SchülerInnen der Klasse sind sportlich ungefähr gleich begabt, sodass der Sportlehrer die Personen per Zufall auswählt.

(a) (1 Ausgleichspunkt) Wie viele unterschiedliche Teams von 5 Personen können aus einer Klasse von 24 Personen gewählt werden?

(b) (2 Punkte) Wie wahrscheinlich ist es, dass der Sportlehrer mit einem Zufallsverfahren, bei dem die Personen willkürlich gewählt werden, ein Unisex-Team zum Wettbewerb schickt? (Unisex-Team: Ein Team, in dem alle Beteiligten dasselbe Geschlecht haben; also entweder nur Buben, oder nur Mädchen.)

(c) (2 Punkte) Es gelten die folgenden Identitäten:

$$\sum_{k=0}^{24} \binom{24}{k} = 2^{24}, \quad \sum_{k=0}^{24} (-1)^k \binom{24}{k} = 0$$

Begründen Sie diese Identitäten anhand der binom'schen Formel!



#### Aufgabe 4. Steuern.

In diesem Beispiel ist die Geldeinheit mit GE angedeutet; du darfst ruhig GE durch Euro ersetzen, wenn es dir leichter scheint.

Im Land Bruttonia ist das Steuersystem wie folgt: Die ersten 1000 GE vom Bruttojahreseinkommen sind steuerfrei. Die nächsten 1000 GE werden mit 25% versteuert und alles, was darüber hinausgeht, wird mit 50% versteuert.

Ein Beispiel: Jemand verdient brutto 4000 GE pro Jahr. Die ersten 1000 sind steuerfrei. Dann bleiben noch 3000 GE übrig. Davon werden die ersten 1000 mit 25% versteuert. Die restlichen 2000 Euro werden mit 50% versteuert. Somit muss diese Person  $0,25 \cdot 1000 + 0,50 \cdot 2000 = 1250$  GE zahlen. Das netto Jahreseinkommen ist somit  $4000 - 1250 = 2750$  GE. (Das netto Jahreseinkommen ist das brutto Jahreseinkommen weniger die gezahlten Steuern.)

(a). (1 Ausgleichspunkt) Eine Person verdient brutto 1800 GE pro Jahr. Berechnen Sie, wie viel Steuern sie pro Jahr zahlen muss.

(1 Punkt) Berechnen Sie das netto Jahreseinkommen für diese Person.

Der effektive Steuersatz  $p_{St}$  besagt, wie viel Prozent vom Bruttogehalt die gezahlten Steuern ausmachen. In Formelform etwa:

$$p_{St} = \frac{\text{gezahlte Steuern}}{\text{Bruttogehalt}} \cdot 100\%$$

(b). (2 Punkte) Berechnen Sie  $p_{St}$  für Person A mit einem brutto Jahresgehalt von 1500 GE und für Person B mit einem brutto Jahreseinkommen von 2500 GE. Erklären Sie den Unterschied qualitativ.

Begründen Sie die Ungleichung  $0 \leq p_{St} < 50\%$ .

(c). (2 Punkte) Falls das Bruttojahreseinkommen  $X$  zwischen 1000 GE und 2000 GE liegt, kann man die zu zahlenden Steuern  $Y$  mithilfe einer Formel  $Y = aX + b$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$ . Bestimmen Sie  $a$  und  $b$ .

(d). (2 Punkte) Eine Person muss pro Jahr 2500 GE an Steuern zahlen. Bestimmen Sie das dazugehörige Bruttojahreseinkommen.

## Mündliche Prüfung im Rahmen der Wiederholungsprüfung

Name: \_\_\_\_\_ Datum: \_\_\_\_\_

(1) Quadratische Gleichungen: Betrachte Gleichungen von der Form  $ax^2 + bx + c = 0$  in  $x$  und diskutiere die Lösungen. Besprich dabei die Rolle von  $a$ ,  $b$  und  $c$  und der Diskriminante. Interpretiere geometrisch!

(2) Geraden: Besprich die Parameterdarstellung und die Normalvektorform. Zeige mittels eines Beispiels, wie man von der einen Darstellung auf die andere kommt.

(3) Stochastik: Definiere den Erwartungswert einer stochastischen Variablen. Gib ein Beispiel an. Erkläre die Beziehung zwischen Mittelwert und Erwartungswert.

## Mündliche Prüfung im Rahmen der Wiederholungsprüfung

Name: \_\_\_\_\_ Datum: \_\_\_\_\_

(1) Quotienten: Definiere den Differenzenquotienten und den Differentialquotienten. Besprich die Beziehung zwischen den beiden und interpretiere sie geometrisch.

(2) Stochastik: Definiere die Varianz einer stochastischen Variablen. Gib ein Beispiel an. Erkläre den Zusammenhang mit der empirischen Varianz.

(3) Parabeln: Betrachte die Parabeln  $y = ax^2 + bx + c$  und besprich die Rolle von  $a$ ,  $b$  und  $c$  und ihre Auswirkung bzw. ihren Einfluss auf Nullstellen, Symmetrie, Scheitelpunkt (und Position davon), Krümmung (links / rechts).

## Mündliche Prüfung im Rahmen der Wiederholungsprüfung

Name: \_\_\_\_\_ Datum: \_\_\_\_\_

(1) Funktionseigenschaften: Betrachte folgende „Funktionseigenschaften“, definiere sie und gib Beispiele an: Monotonie(-bereiche), Stetigkeit, Linear, Wendestelle, Links-/Rechtskrümmung, Periodizität, Definitionsbereich, Nullstellen,  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$  (Verhalten im Unendlichen).

(2) Stochastik – Bernoulliverteilung aka Binomialverteilung: Interpretiere den Ausdruck  $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ , gib an, was die Zutaten bedeuten und besprich mit einem sinnvollen Beispiel, wie man diese Formel zu verwenden hat. Gib auch den Erwartungswert und die Varianz an!

(3) Zahlenmengen: Besprich die Zahlenmengen, die (Rechen-)Operationen, die innerhalb dieser Mengen ausgeführt werden können, die Beziehungen zwischen den unterschiedlichen Zahlenmengen und gib möglichst viele Beispiele an! Gib dem Ausdruck  $|x|$  und  $\frac{a}{b}$  in verschiedenen Mengen eine Bedeutung.