Mathematik 2. Klasse

Zwei Mengen von Zahlen

Guten Tag liebe SchülerInnen!

Hier gibt es dann einen Text, der hoffentlich zum Lesen und Lernen recht geeignet ist. Um es euch nicht zu fad zu machen, gibt es auch mehrere Aufgaben. Denn, so wie ihr wißt, ist eine gute Einstellung zu Mathematik, dass Mathematik eine Kunst des Problemlösens ist. Daher muss ich euch wohl mit Problemen füttern ...

Was will ich mit diesem Text mit Aufgaben erreichen? Natürlich, dass ihr etwas lernt. Um sicher zu sein, dass ihr das Richtige lernt und verstanden haben werdet, habe ich einige Kontrollziele definiert. Diese sind: (1) Du kennst alle genannten Definitionen auswendig. (Keine Sorge, so viele werden es nicht sein.) (2) Du machst alle 'Aufgaben'. (3) Du verstehst den Text. (4) Du suchst dir einige 'Zusatzaufgaben' selbst aus. Mit diesen Aufgaben kannst du das Niveau ein wenig individualisieren. In anderen Worten, du arbeitest auf einem für dich guten Niveau.

Und wie werde ich das kontrollieren? Methode 1: Teilweise kommt dieser Stoff zum Stoff einer Schularbeit. Methode 2: Einige Hefte schaue ich mir schon detailliert an. Methode 3: Die Aufgaben sind auch Hausaufgabe, und das besprechen wir, wie fast immer, am Anfang der Stunde. Methode 4: Ich gehe in Phasen des selbstständigen Arbeitens durch die Klasse und schaue über die Schultern mit. Methode 5: Ich kann kleine Stundenwiederholungen abhalten, um zu sehen, ob der Stoff verstanden wurde.

Also, daraus lässt sich Folgendes schließen: Die Aufgaben und Zusatzaufgaben sollten schon gut lesbar und deutlich markiert in deiner Mappe stehen. Befolge darum folgende Regeln: (A) Markiere die Aufgaben mit der Abkürzung ZMZ und dann die Aufgabennummer. (B) Wenn du eine Aufgabe nicht besonders schön oder sogar fehlerhaft gemacht hast, reicht es, ein einfaches Kreuz durch die Aufgabe zu machen, darunter 'steht weiter vorne' und dann die Aufgabe dort wo genügend Platz ist, deutlich nochmal aufzuschreiben.

Natürlich steht es euch frei: (X) Ein Portfolio anzulegen, à la Schnellhefter, (Y) eine eigene Abteilung in der Mappe zu haben, (Z) ein eigenes Heftlein zu benutzen. Aber diese drei Möglichkeiten sind nur Empfehlungen.

Gut, wenn wir das alles kapiert haben: Los geht's!

Mengen

Was ist eine Menge? Im Alltag benutzen wir das Wort 'Menge' oft um anzudeuten, dass etwas eine Gruppe bildet und dass es von einer Sorte schon viele gibt. Im Satz: "Da war eine Menge Leute auf der Straße!" oder "Da war schon eine Menge los!" bedeutet "eine Menge" etwas wie "recht viel". In der Mathematik ist die Bedeutung ein wenig anders.

In der Mathematik ist eine Menge eine Art, bestimmte Objekte zusammenzufassen. Etwas kann zu einer Menge dazu gehören, oder nicht. Und eben diese Eigenschaft einer Menge, ist das was wir brauchen: Wir benutzen Mengen, um mathematische Objekte in 'Gruppen' einzugliedern. Aber, warum heißt es dann nicht einfach 'Gruppe'? Tja, das weiß ich nicht. Ich weiß aber, dass 'Gruppe' in der Mathematik eine ganz besondere Bedeutung hat. Später werden wir vielleicht einige Gruppen sehen. Du kennst schon einige Gruppen: Die Drehungen um einer Achse bilden eine Gruppe. Aber, was eine Gruppe ist, kann ich noch nicht sagen, und es ist jetzt auch nicht Thema.

Vielleicht sollte ich mal mit den zwei wichtigsten Beispielen anfangen:

Definition: Die Menge der natürlichen Zahlen beinhaltet die Zahlen $0, 1, 2, 3, \ldots$.

Achtung, ... bedeutet 'und so weiter'. Die Definition impliziert dann, dass 5 auch eine natürliche Zahl ist, aber 143 auch. Aber, die Zahl $\frac{1}{2}$, oder $3,156$ sind keine natürlichen Zahlen. Wir sagen, sie gehören nicht zur Menge der natürlichen Zahlen.

Die Menge der natürlichen Zahlen hat ein eigenes Symbol: $\mathbb{N}$. Sogar 'ist Element von' hat ein eigenes Symbol, nämlich $\in$. Und, dann ist es nicht so erstaunend, dass 'ist nicht Element von' mit $\notin$ angedeutet wird. Also, der Satz 'die Zahl 87 ist eine natürliche Zahl' werde ich wie folgt aufschreiben: $87 \in \mathbb{N}$. Die 'Phrase' $3\frac{2}{3} \notin \mathbb{N}$ bedeutet also 'die Zahl $3\frac{2}{3}$ gehört nicht zur Menge der natürlichen Zahlen', oder 'die Zahl $3\frac{2}{3}$ ist keine natürliche Zahl'.

Aufgabe 1. Kontrolliere folgende Aussagen auf Richtigkeit: (A) $5 \notin \mathbb{N}$, (B) $3,14 \notin \mathbb{N}$, (C) $8 \cdot \frac{3}{4} \in \mathbb{N}$, (D) $2145 \in \mathbb{N}$, (E) $120 : 11 \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2. Kommentiere folgende Aussage: $0,999\cdots \in \mathbb{N}$. Hinweis: Denke gut nach, wir hatten das schon!

Aufgabe 3. Kommentiere folgende Aussagen, schließe auf Richtigkeit und benutze dazu mindestens drei Beispiele! (i) *Wenn A und B natürliche Zahlen sind, dann auch $A + B$.* (ii) *Wenn $A \in \mathbb{N}$ und $B \in \mathbb{N}$, dann auch $A \cdot B \in \mathbb{N}$.* (iii) *Wenn $A \in \mathbb{N}$ und $B \in \mathbb{N}$, dann auch $A : B \in \mathbb{N}$.*

Es gibt eine lustige Art, die natürliche Zahlen zu definieren und dazu man braucht nur zwei Regeln: Regel 1: $0 \in \mathbb{N}$. Regel 2: Wenn $x \in \mathbb{N}$, dann auch $x + 1 \in \mathbb{N}$. Das schaut sicher sehr komisch aus. Aber gut, was bedeutet es. Na ja, 0 ist eine natürliche Zahl, also mit Regel 2 auch $0 + 1 = 1$, also $1 \in \mathbb{N}$, also mit Regel 2 auch $1 + 1 \in \mathbb{N}$, also auch $2 \in \mathbb{N}$. Aber dann, wieder mit Regel 2, auch $2 + 1 \in \mathbb{N}$, also $3 \in \mathbb{N}$. Und so weiter.

Definition: Die Menge der Bruchzahlen beinhaltet alle Bruchzahlen $\frac{A}{B}$, wobei A und B natürliche Zahlen sind, aber $B \neq 0$.

Wir benutzen das Symbol $\mathbb{B}$ für die Menge der Bruchzahlen.

ACHTUNG: Manche kennen vielleicht schon von Geschwistern die Notation $\mathbb{Q}$, aber das Symbol steht für die Menge der rationalen Zahlen, wobei auch negative Bruchzahlen vorkommen, und die brauchen wir jetzt noch nicht.

Aufgabe 4. Kommentiere folgende Aussagen, schließe auf Richtigkeit und benutze dazu mindestens drei Beispiele! (i) *Wenn A und B Bruchzahlen sind, dann auch $A + B$.* (ii) *Wenn $A \in \mathbb{B}$ und $B \in \mathbb{B}$, dann auch $A \cdot B \in \mathbb{B}$.* (iii) *Wenn $A \in \mathbb{B}$ und $B \in \mathbb{B}$, dann auch $A : B \in \mathbb{B}$.* (vi) *Wenn $A \in \mathbb{B}$ und $B \in \mathbb{B}$, dann auch $A - B \in \mathbb{B}$.*

Natürlich ist euch aufgefallen, dass jede natürliche Zahl auch eine Bruchzahl ist. Wir sagen dann, $\mathbb{N}$ ist eine Untermenge von $\mathbb{B}$. Eine Untermenge ist in einer anderen Menge enthalten, wäre eine saloppe Formulierung, aber später machen wir das genau. Wir schreiben $\mathbb{N} \subset \mathbb{B}$ um anzudeuten, dass $\mathbb{N}$ in $\mathbb{B}$ liegt, also eine Untermenge von $\mathbb{B}$ ist.

Gibt es auch andere Mengen? O ja! Wir deuten sie oft mit geschwungenen Klammern an, und in den Klammern steht, was in der Menge drinnen ist:

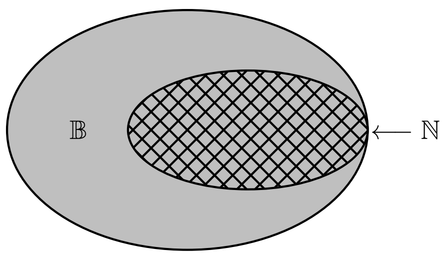
Beispiele. $A = \{Montag, Dienstag, Mittwoch, Donnerstag, Freitag\}$ könnte man die Menge der Arbeitstage nennen. $Alphabet = \{a, b, c, \ldots, y, z\}$, spricht für sich. Die Menge der natürlichen Zahlen zwischen 3 und 8 ist $\{4, 5, 6, 7\}$. Klarerweise gilt $\{4, 5, 6, 7\} \subset \mathbb{N}$, denn alles in $\{4, 5, 6, 7\}$ liegt auch in $\mathbb{N}$. Hoffentlich ist es auch klar, dass die Menge der 'Arbeitstage' eine Untermenge der Menge der 'Wochentage' ist.

Aufgabe 5. (a) Kommentiere folgenden 'Satz': Wenn $x \in \mathbb{N}$ und $x < 5$, dann $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. (b) Folgender Satz ist falsch, warum? $13 < x < 16 \Longrightarrow x \in \{15, 16\}$. (c) Der Satz "$13 < x < 16 \Longrightarrow x \in \{13, 14, 15, 16\}$" ist korrekt, aber nicht ganz zufriedenstellend. Verbessere den Satz!

Aufgabe 6. Ein Klassiker: Wenn $x^2 = x$, dann $x \in \{0, 1\}$. Kontrolliere!

Zusatzaufgabe B1. Finde eine geeignete Menge für x in $x^2 = 3x$. Also, finde alle Zahlen x mit $x^2 = 3x$ (das sind nicht sehr viele) und schreibe sie als Menge.

Tipp. Mengen kann man sich teilweise grafisch vorstellen. Dann kann man die Beziehung zwischen den Mengen schön sehen. Schau dir mal die unterstehende Figur an:



Die größere Ellipse enthält die kleinere; also, die größere kann hier $\mathbb{B}$ darstellen, die die kleinere Menge $\mathbb{N}$ enthält. Achtung, $\mathbb{N}$ ist kleine Menge, denn da sind unendlich viele Elemente drinnen. Aber irgendwie scheint $\mathbb{B}$ doch noch größer zu sein.

WARNUNG. Manche glauben, dass Bruchzahl und natürliche Zahl sich gegenseitig ausschließen. So wie man mit dem Begriff 'Untermenge' deutlich sieht, ist diese Idee völlig falsch. Denn die Zahl 2 ist eine schöne natürliche Zahl, und darum AUCH eine Bruchzahl. Genauso ist jede natürliche Zahl eine Dezimalzahl. Vergleiche es mal mit Enten und Vögeln. Eine Ente ist auch ein Vogel. Und ein Vogel zu sein heißt nicht, dass es keine Ente sein kann. Umgekehrt gilt es schon; wenn etwas kein Vogel ist, dann auch keine Ente. Wenn etwas keine Bruchzahl ist, dann auch keine natürliche Zahl, denn jede natürliche Zahl ist auch eine Bruchzahl. Kapiert? Solltest du schon!

Dividieren in den Mengen

Wir haben schon gesehen, dass Additionen kein Problem sind: Die Summe zweier natürlicher Zahlen ist wiederum eine natürliche Zahl. Auch ist die Summe zweier Bruchzahlen wieder eine Bruchzahl.

Wir haben auch schon gesehen, dass Multiplikationen kein Problem sind: Das Produkt zweier natürlicher Zahlen ist wiederum eine natürliche Zahl. Auch ist das Produkt zwwiere Bruchzahlen wieder eine Bruchzahl.

Subtrahieren ist aber schon ein Problem: Mit der Subtraktion $5 - 18$ wandern wir aus der Menge der natürlichen Zahlen weg! Darum führen wir später auch die negativen Zahlen ein. Dieses Problem lassen wir zuerst ein wenig ruhen. Aber du solltest wissen, dass $5 - 18$ einen Sinn hat, aber nicht mit $18 - 5$ gleichzusetzen ist.

Dividieren ist ein Problem, dass mit den Bruchzahlen schon gelöst wurde. Obwohl bei einer Division zweier natürlicher Zahlen das Ergebnis nicht immer wieder eine natürliche Zahl ist, ist dies bei Bruchzahlen schon in Ordnung – dabei müssen wir aber Dividieren durch Null ausschließen.

Beispiele. (i) Die Division 15 : 3 liefert keine Probleme innerhalb $\mathbb{N}$, denn das Ergebnis 5 liegt auch in $\mathbb{N}$. (ii) Die Division 15 : 4 liefert uns in $\mathbb{N}$ ein Problem. Denn in $\mathbb{N}$ hat dieses Problem keine Lösung. Um dieses Problem zu lösen kennt ihr zwei Techniken: Entweder mann sagt $15 : 4 = 3$ *Rest* 3, oder man sieht die Berechnung als ein Problem in $\mathbb{B}$ und dann $15 : 4 = 3\frac{3}{4} = 3,75$. (iii) Innerhalb $\mathbb{B}$ ergibt die Aufgabe $\frac{2}{3} : \frac{1}{3}$ kein Problem; die Antwort lautet 2 und liegt sogar in $\mathbb{N}$. (iv) Die Aufgabe $1\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$ ist in $\mathbb{B}$ auch kein Problem, das Ergebnis $4\frac{1}{2}$ ist eine Bruchzahl, die nicht eine natürliche Zahl ist.

ACHTUNG: Ab jetzt ist es wichtig, zu wissen, ob wir bei eine Division in $\mathbb{N}$ oder in $\mathbb{B}$ arbeiten.

Aufgabe 7. Liegt der Kehrwert einer natürlichen Zahl wieder in $\mathbb{N}$? Untersuche!

Aufgabe 8. Was bedeutet es, wenn eine Division in $\mathbb{N}$ Rest Null hat? Gib ein Beispiel, und untersuche, in welcher Menge das Ergebnis dann liegen kann.

Aufgabe 9. Berechne folgende Aufgaben mal in $\mathbb{N}$ und mal in $\mathbb{B}$. (a) 5 : 3, (b) 123 : 10, (c) 22 : 7.

Kehrwert und Divisionen

Im letzten Jahr habt ihr schon einige Aufgaben gehabt, in welchen kontrolliert wurde, dass durch eine Zahl Dividieren und mit dem Kehrwert Multiplizieren gleich sind.

Beispiele. (i) Dividieren durch 2 ist dasselbe wie Multiplizieren mit $\frac{1}{2}$. Nimm mal einige Beispiele, so wie $3 : 2 = 1\frac{1}{2}$ und $3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$. (ii) Dividieren durch $\frac{1}{4}$ ist dasselbe wie Multiplizieren mit 4. In der Tat sieht man leicht, dass $2 : \frac{1}{4} = 8 = 2 \cdot 4$ und $3 : \frac{1}{4} = 12 = 3 \cdot 4$, aber auch $\frac{1}{2} : \frac{1}{4} = 2 = 4 \cdot \frac{1}{2}$.

Aufgabe 10. Kontrolliere, dass $\frac{3}{4}$ genau 8mal in 6 passt. Berechne dann auch $6 \cdot \frac{4}{3}$.

Aus diesen Beobachtungen lässt sich schließen, dass wir Dividieren in $\mathbb{B}$ gar nicht brauchen! Wir müssen nur Multiplizieren und den Kehrwert bilden können. Dies ist sehr wichtig, darum schreibe ich es nochmals auf:

Durch eine Bruchzahl Dividieren ist dasselbe wie Multiplizieren mit seiner Kehrwert.

In Formelsprache:

$$\boxed{X : \frac{A}{B} = X \cdot \frac{B}{A}}$$

ACHTUNG: Dividieren ist nicht symmetrisch (das heißt, im Allgemeinen gilt $X : Y \neq Y : X$), darum muss man aufpassen, von welcher Zahl du den Kehrwert bildest. Nur von der zweiten Zahl ergibt etwas Richtiges. Also, $3 : \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ ist extremst falsch. Hüte dich vor dem Feherl!

Aufgabe 11. Mache folgende Berechnungen und kommentiere, ob das Richtige aus deiner Berechnung gekommen ist, indem du die Antwort auf eine andere Weise bekommst. (a) $3 : \frac{2}{5}$, (b) $\frac{3}{4} : \frac{1}{8}$, (c) $\frac{3}{4} : \frac{3}{8}$, (d) $1\frac{1}{2} : \frac{2}{5}$.

Zusatzaufgabe B2. Beschreibe einen Zusammenhang zwischen 11(a) und 11(d), aber auch zwischen 11(b) und 11(c).

Das Teilerproblem

Es gibt mehrere Tricks, die uns helfen, mit Bruchzahlen gut und schnell rechnen zu können. Vielleicht hast du im letzten Jahr bei der Portfolioarbeit gesehen, dass das kgV und der ggT eine hilfreiche Rolle beim Rechnen mit Bruchzahlen spielen können. Und daher: Obwohl es komisch klingt, hilft Verständnis von $\mathbb{N}$ uns, die Struktur von $\mathbb{B}$ zu verstehen.

Definition. Wenn A und B natürliche Zahlen sind, dann nennen wir A einen Teiler von B, falls $B : A$ in $\mathbb{N}$ Rest Null hat.

Wenn A ein Teiler von B ist, dann sagen wir auch wohl, A teilt B, und wir kürzen das ab, indem wir schreiben $A|B$. Wenn A B nicht teilt, schreiben wir $A \nmid B$.

Beispiele. (i) $4|52$, denn $52 : 4 = 13$. Also $52 = 4 \cdot 13$. (ii) $5 \nmid 52$, denn $52 : 5$ hat Rest 2.

Aufgabe 12. Suche selbst einige Beispiele und kontrolliere, ob folgende Aussage stimmt: Wenn $A|B$, dann $\frac{B}{A} \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 13. Suche selbst einige Beispiele und kontrolliere, ob folgende Aussage stimmt: Wenn $A \mid B$, dann $B = A \cdot k$, wobei k auch eine natürliche Zahl ist. Ein Beispiel gebe ich euch als Hinweis: $12 \mid 60$ stimmt, und tatsächlich kann ich dann k gleich 5 nehmen, denn $60 = 12 \cdot 5$. Du must nun mehrere Beispiele finden.

DIE SUMMENREGEL: Wenn A ein Teiler von B_1 und B_2 sind, dann teilt A auch $B_1 + B_2$.

Aufgabe 14. Kontrolliere obige Regel mit mindestens 5 Beispielen.

Definition. Drei Symbole: $\max(A, B)$ ist das Maximum von A und B; $\min(A, B)$ ist das Minimum von A und B; $\text{Diff}(A, B) = \max(A, B) - \min(A, B)$.

Aufgabe 15. (i) 'Berechne' $\max(5, 3)$, $\min(5, 3)$ und $\text{Diff}(A, B)$. (ii) Was ist $\max(A, A)$? (iii) Was ist $\text{Diff}(A, A)$?

DIE DIFFERENZREGEL. Wenn A ein Teiler von B_1 und B_2 ist, dann teilt A auch $\text{Diff}(B_1, B_2)$. A teilt also auch die Differenz.

Aufgabe 16. Kontrolliere obige Regel mit mindestens 5 Beispielen.

DIE PRODUKTREGEL. Wenn A ein Teiler von B ist, und C ist irgendeine natürliche Zahl, dann teilt A auch das Produkt $B \cdot C$.

Aufgabe 17. Kontrolliere obige Regel wie folgt, finde 5 Paare A und B, sodass $A \mid B$ und kontrolliere, das $A \mid B$ für $C \in \{2, 3, 4, 5\}$.

Aufgabe 18. Bei obigen Regeln muss man die Reihenfolge nicht vertauschen. Kommentiere folgende fehlerhafte Beispiele: (i) $3 \mid 15$ und $5 \mid 15$ also auch $8 \mid 15$, denn $8 = 5 + 3$. (ii) Weil $7 \mid 21$ und $3 \mid 21$ muss auch $4 \mid 21$, denn $4 = \text{Diff}(7, 3)$. (iii) 12 teilt 6, denn 3 teilt 6, also teilt die Zahl $3 \cdot 4$ auch $6'$.

Aufgabe 19. Löse folgende Probleme: (i) Gesucht sind $A, B \in \mathbb{N}$ mit $A \mid B$ und $B \mid A$. Wie viele solche Paare gibt es? (ii) Gesucht ist A, sodass $A \mid 120$ und $A + 1 \mid 120$. Wie viele solche A gibt es? (iii) Gesucht A, B und C mit $A \mid 30$, $B \mid 30$ und $C \mid 30$, sodass $A \cdot B \cdot C = 900$.

Definition. Für eine natürliche Zahl A ist die Teilermenge von A die Menge aller Teiler von A.

Beispiel. Die Teilermenge von 4 ist $\{1, 2, 4\}$.

Aufgabe 20. Welche Zahl ist in jeder Teilermenge enthalten?

Aufgabe 21. Finde alle A, sodass die Teilermenge von A nur ein Element hat.

Aufgabe 22. Wie viele Zahlen sind in der Teilermenge einer natürlichen Zahl A, wenn A auf jeden Fall mehr als 1 ist.

Aufgabe 23. Wie heißen die Zahlen A sodass die Teilermenge $\{1, A\}$ ist?

Aufgabe 24. Finde eine Zahl A, sodass die Zahlen 1 bis 6 in der Teilermenge enthalten sind. Hinweis: Produkt.

Aufgabe 25. Finde die Teilermengen von (i) 100, (ii) 75, (iii) 121, (iv) 24.

Zusatzaufgabe B3. Warum gibt es keine unendlich große Teilermengen?

Zusatzaufgabe B4. Beweise folgende Aussage: Wenn eine gerade Zahl in der Teilermenge von A enthalten ist, dann ist auch 2 in der Teilermenge von A enthalten. Insbesondere ist A gerade.

Zusatzaufgabe B5. Finde eine Beziehung zwischen der Teilermenge von A und der Teilermenge A^2. Hinweis: Tue zuerst drei Beispiele: nimm $A = 6$ (sodass $A^2 = 36$) und danach $A = 5$, sodass $A^2 = 25$. Das sollte reichen um eine Idee zu bekommen.

Oh dear prime numbers! (Oh meine lieben Primzahlen!)

Primzahlen sind wichtig, wenn man die Struktur von $\mathbb{N}$ verstehen will.

Aufgabe 26. Kontrolliere, dass folgende Definition stimmt. *Eine Primzahl ist eine natürliche Zahl, deren Teilermenge aus genau zwei Zahlen besteht.*

Aufgabe 27. Kontrolliere, dass folgende Definition auch stimmt. *Eine Zahl ist eine natürliche Zahl, die man nicht in ein Produkt $X \cdot Y$ zerlegen kann, ohne dass X oder Y gleich 1 ist.*

Jetzt kommt der Hammer:

MERKSATZ: Jede natürliche Zahl kann man *eindeutig* in ein Produkt von (mehreren) Primzahlen zerlegen. Wenn man zwei Primfaktorzerlegungen einer Zahl hat, stimmen die Anzahlen der verschiedenen Primzahlen überein, die Primzahlen selbst auch, nur kann ein Unterschied in der Reihenfolge auftreten.

Wie kann man diesen Satz verstehen? Relativ leicht: Wenn eine Zahl eine Primzahl ist, dann sind wir gleich fertig – das Produkt ist dann ein leeres Produkt, denn nur eine Zahl ist da. Wenn die Zahl nicht eine Primzahl ist, kann man sie in ein Produkt zerlegen. Dieses Zerlegen wiederholt man, bis man nur noch Primzahlen hat, und die kann man nicht in ein Produkt zerlegen.

Beispiele (i) Die Zahl 13 ist eine Primzahl, daher ist die Primfaktorzerlegung $13 = 13$ (leeres Produkt). (ii) Die Zahl 12 kann man zuerst in – zum Beispiel – 3 und 4 zerlegen, $12 = 3 \cdot 4$. Davon ist 3 schon eine Primzahl, aber 4 nicht. Aber $4 = 2 \cdot 2$ und 2 ist eine Primzahl. Daher $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$. (iii) Einige andere Beispiele: $27 = 3 \cdot 3 \cdot 3$, $6 = 2 \cdot 3$, $5 = 5$, $10 = 2 \cdot 5$, $100 = 10 \cdot 10 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$.

Aufgabe 28. Gib die Primfaktorzerlegung von: (a) 120, (b) 20, (c) 50, (d) 1000, (e) 345.

Aufgabe 29. Falsch oder Richtig? Gib eine Begründung, mit oder ohne Beispiele(n): (a) *Die Primzahlen in der Primfaktorzerlegung einer Zahl kommen auch in der Teilermenge vor.* (b) *Kennt man die Primfaktorzerlegung zweier Zahlen, dann kann man kgV und ggT leicht ausrechnen.*

Bei der letzten Aufgabe musstest du sicher gut und lange nachdenken. Gegebenenfalls gebe ich dazu einige Beispiele, damit ihr besser auf den Weg kommt.

Zahlen, die keines sind

Was für Zahlen gibt es dann noch? Ganz komische gibt es noch! Ihr kennt nur noch ein Viertel der ganzen Geschichte ... bestenfalls. Ich gebe mal ein wichtiges Beispiel:

(1) Es gibt negative Zahlen. Darüber reden wir noch.

(2) Unter den positiven gibt es noch welche, die sind zwar Dezimalzahl, aber nicht eine Bruchzahl. Darüber geht jetzt die folgende Aufgabe.

Aufgabe 30. Ich behaupte: Es gibt keine Bruchzahl $X = \frac{A}{B}$, sodass $X \cdot X = 2$. Also, in anderen Worten, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. (a) Berechne $X \cdot X$ wenn (i) $X = 1,4$ (ii) $X = 1,41$ (iii) $X = 1,4142$ und (iv) mit einem Taschenrechner: $X = 1.41421356$. (b) Gibt es Bruchzahlen mit einer unendlich langen Dezimalentwicklung? Begründe! (c) Zeichne ein Quadrat mit Seitenlänge $10cm$ und miß die Diagonalen. (d) Wenn eine Zahl eine endliche Dezimalentwicklung hat, dann ist sie eine Bruchzahl. Warum? (e) Die (positive) Zahl X mit $X \cdot X = 2$ hat eine unendlich lange Dezimalentwicklung, die nicht periodisch ist; sie wiederholt sich nicht. Eine Dezimalentwicklung, die sich ständig wiederholt, nennt man periodisch – Beispiele sind, $1 = 1,0000000\cdot$ und $0,3333\cdots$ und $2,01010101$ aber auch $3,2470909090909\cdots$. Kontrolliere, dass die Zahl $0,101001000100001\cdots$ sich auch nicht wiederholt und finde noch so eine Zahl. (f) Behauptung (also, nur zu Kenntnis nehmen): Wenn eine Zahl eine nicht periodische Dezimalentwicklung hat, ist sie keine Bruchzahl.

Merksatz: Es gibt mehr 'Dezimalzahlen' als Bruchzahlen.