Integrieren und Differenzieren

Beispiele und Übungen

Dieses Hand-Out ist fad. Es enthält nur eine Liste an Beispielen und eine Liste an Übungen. Meine Empfehlung ist: Lies dir die Beispiele durch, mache die Übungen und varriiere dann selbst die Beispiele und Übungen. Es kann sein, dass dann eventuell ein Integral entsteht, das du nicht schaffst: zeige es mir und ich kann dir das ggf. bestätigen. Trotzdem, varriiere und versuche ohne Angst! Benutze dieses Hand-Out zu deinem Vorteil, so wie es dir am besten passt!

1 Basic Functions

Von folgenden Funktionen musst du die Ableitung eigentlich auswendig wissen:

Beispiel 1. $f(x) = x^r$ mit r eine reelle Zahl, außer Null. Dann $f'(x) = rx^{r-1}$. Für $r = 1$ findest du $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x = 1$, und für $r = 2$ findest du $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^2 = 2x$.

Beispiel 2. $f(x) = \sqrt{x}$. Dies geht wie beim vorigen Beispiel: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Beispiel 3. $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$. Wie bei Beispiel 1. $f'(x) = \frac{-1}{x^2}$.

Beispiel 4. Exponentialfunktionen. $f(x) = e^x$, dann $f'(x) = e^x$ selbst wieder. Also $f' = f$ für diese Funktion.

Beispiel 5. Sinus- und Cosinusfamilie. $f(x) = \sin(x)$, dann $f'(x) = \cos(x)$. $g(x) = \cos(x)$ dann $g'(x) = -\sin(x)$. Und $h(x) = \tan(x)$ hat Ableitung $h'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$. Nota Bene, es gilt $\frac{1}{\cos^2(x)} = \frac{\sin^2(x)+\cos^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$, sodass sogar gilt $h'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$. Achtung, es gelten somit $f'' = -f$, $g'' = -g$ und $h' = 1 + h^2$.

Beispiel 6. Logarithmus. $f(x) = \ln(x)$ dann $f'(x) = \frac{1}{x}$. Der Logarithmus ist nur für positive x definiert, seine Ableitung für alle x außer Null. Zeichne bitte den Graphen von $\ln(|x|)$ um zu sehen, dass diese Funktion überall (außer bei Null) die Ableitung $\frac{1}{x}$ hat.

2 Skalarmultiplikation

Es gelten folgende Regeln:

(1) Wenn $k \in \mathbb{R}$ dann $(k \cdot f)'(x) = k \cdot f'(x)$. Also zuerst mit drei multiplizieren und dann differenzieren oder umgekehrt macht nichts aus.

(2) Wenn $k \in \mathbb{R}$ dann $(f(kx))' = k \cdot f'(kx)$. Mit anderen Worten, wenn das Argument einer Funktion mit k multipliziert wird, musst du am Ende die Ableitung auch mit k multiplizieren.

Beispiel 7. Wenn $f(x) = 3x^2$, dann $f'(x) = 3 \cdot 2x = 6x$.

Beispiel 8. Wenn $f(x) = \sin(5x)$, dann $f'(x) = \cos(5x) \cdot 5 = 5\cos(5x)$.

Beispiel 9. Wenn $f(x) = 3e^{2x}$, dann $f'(x) = 6e^{2x}$.

Beispiel 10. Wenn $f(x) = \ln(4x)$, dann $f'(x) = \frac{1}{4x} \cdot 4 = \frac{1}{x}$. Der Faktor 4 ist also egal, Warum? Einfach, benutze $\ln(4x) = \ln(4) + \ln(x)$ und $\ln(4)$ ist nur eine Zahl, fällt also weg beim Differenzieren.

Beispiel 11. Wenn $f(x) = e^{3x+2}$, dann ist das wie $f(x) = e^{3x} \cdot e^2$ also $f'(x) = 3e^{3x} \cdot e^2 = 3e^{3x+2}$.

3 Verknüpfungsregel

Wenn f zusammengesetzt ist, dann können wir schreiben, $f = g \circ h$, also f ist die Anwendung von g nach h. Mit anderen Worten $f(x) = g(h(x))$, also aus x wird zuerst $h(x)$ und aus $h(x)$ macht man dann $g(h(x))$. Diese Funktionen leitet man mit folgender Regel ab:

Wenn $f(x) = g(h(x))$, dann $f'(x) = h'(x) \cdot g'(h(x))$. In Worten, man differenziert einerseits h und setzt x ein, andererseits differenziert man g und setzt $h(x)$ ein, und diese beiden werden multipliziert.

In noch einer anderen Formulierung, setzte zuerst $u = h(x)$, dann bekommt man

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} g(u) = \frac{\mathrm{d}g(u)}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = g'(u) \cdot h'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) \,.$$

Beispiel 12. $f(x) = e^{x^2}$, dann $f = g \circ h$ mit $h(x) = x^2$ und $g(u) = e^u$. Einsetzen ergibt dann $f'(x) = 2x \cdot e^{x^2} = 2xe^{x^2}$.

Beispiel 13. $f(x) = \sin^4(x)$, dann $f = g \circ h$ mit $h(x) = \sin(x)$ und $g(u) = u^4$. Somit $f'(x) = 3\sin^3(x)\cos(x)$.

Beispiel 14. $f(x) = \ln(x^2 + 1)$, dann $f = g \circ h$ mit $h(x) = x^2 + 1$ und $g(u) = \ln(u)$. Daher $f'(x) = \frac{1}{u} h' = \frac{2x}{x^2+1}$.

Beispiel 15. $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$, dann $f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Beispiel 16. $f(x) = (2x - 3)^8$, dann $f = g \circ h$ mit $h(x) = 2x - 3$ und $g(u) = u^8$. Daher $f'(x) = 8u^7 h' = 16(2x - 3)^7$.

4 Produktregel

Wenn $f(x) = g(x)h(x)$, dann $f'(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x)$.

Aus dieser Regel leiten wir sehr leicht eine andere Regel her:

Beispiel 17. Wenn $f(x) = \frac{1}{g(x)}$, dann gilt $f(x)g(x) = 1$. Also, wenn ich das Produkt fg differenziere, bekomme ich Null, da die Ableitung von 1 die Null ist. Also mit der Produktregel $0 = (fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$, aber da $f = \frac{1}{g}$ bekomme ich $f'g = -\frac{g'}{g}$ also $f' = -\frac{g'}{g^2}$. Dieses Ergebnis bekommt man auch wenn man die Verknüfpungsregel anwendet!

Beispiel 18. Noch eine Regel, die wichtig ist: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g-fg'}{g^2}$. Aber bitte, nur anwenden wenn f und g beide nicht eine Zahl sind. Ausdrücke wie $h(x) = \frac{2x^2}{x}$ bitte zuerst vereinfachen!

Beispiel 19. $f(x) = x^2 = xx$, dann $f'(x) = 1x + x1 = 2x$, was wir schon wussten. Auch mit $g(x) = x^3 = x^2x$ bekommen wir $g'(x) = 2xx + x^2 1 = 3x^2$ eine alte bekannte zurück.

Beispiel 20. $f(x) = x\sin(x)$, dann $f'(x) = 1\sin(x) + x\cos(x) = \sin(x) + x\cos(x)$

Beispiel 21. $f(x) = xe^x$, dann $f'(x) = e^x(x + 1)$, kontrolliere!

Beispiel 22. $f(x) = x\ln(x + 1)$, dann $f'(x) = \ln(x + 1) + \frac{x}{x+1}$.

Beispiel 23. Wenn $f(x) = \frac{x+1}{x^2-2}$, dann $f'(x) = \frac{1(x^2-2)-(x+1)2x}{(x^2-2)^2} = \frac{-x^2-2x-2}{(x^2-2)^2}$.

Beispiel 24. Wenn $f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, dann $f'(x) = \frac{\cos(x)\cos(x)-\sin(x)\cdot - \sin(x)}{\cos(x)^2} = \frac{\sin^2(x)+\cos^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$. Auch das wussten wir schon.

Beispiel 25. $f(x) = xe^{2x+x^2}$, dann $f'(x) = 1e^{2x+x^2} + x \cdot (2 + 2x)e^{2x+x^2} = (2x^2 + 2x + 1)e^{2x+x^2}$.

5 Integrieren

Integrieren ist das was hier oben steht so benutzen, dass du folgendes Problem lösen kannst: Gegeben ist f, finde F sodass $F' = f$.

Dieses Rätsel hat nicht immer befriedigende Antworten: Es gibt keine einfache Form für die Stammfunktion von $f(x) = e^{x^2}$. Man kann dann auch eine neue Funktion definieren. Folgendes ist zB recht gängig: Man könnte eine neue Funktion definieren, nenn wir sie $Wien$, wie folgt: $Wien(x)$ ist die Fläche zwischen dem Graphen der Funktion e^{-x^2} und der x-Achse im Intervall $(-\infty, x]$. Das werden wir aber erst später machen ...

Beispiel 26. $\int x\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + C$ mit C eine Konstante. Wenn wir die Funktion $f(x) = \frac{x^2}{2} + C$ differenzieren bekommen wir tatsächlich x.

Beispiel 27. $\int \ln(x)\mathrm{d}x = x\ln(x) - x + C$. Kontrolliere mit differenzieren!

Beispiel 28. $\int (2x+3)^4\mathrm{d}x = \frac{1}{8}(2x+3)^5 + C$. Betrachte dieses Beispiel gut! Wir müssen also gar nicht das ganze Ding ausmultiplizieren!

So wie du vielleicht schon siehst, wer sehr oft differenziert hat, integriert leicht. Gut integrieren lernen fängt mit differenzieren an. Kontrolliere deine Stammfunktion auch immer indem du integrierst (wenn du die Zeit hast)!!!!!

6 Übungen

Übung 1. Differenziere $f(x) = e^{x^4}$.

Übung 2. Differenziere $f(x) = \frac{1}{1+\sin^2(3x)}$

Übung 3. Differenziere $f(x) = \sqrt{3+4x^3}$

Übung 4. Differenziere $f(x) = x^4 - 1 + (x+1)^3$

Übung 5. Differenziere $f(x) = (e^x + 2)^3$.

Übung 6. Differenziere $f(x) = \sin(x^2)$

Übung 7. Differenziere $f(x) = e^{\sin(x)}$

Übung 8. Differenzier $f(x) = 3^x = e^{\ln(3)x}$

Finde die Stammfunktionen und kontrolliere mit Differenzieren:

Übung 9. $\int xe^x\mathrm{d}x$

Übung 10. $\int xe^{x^2}\mathrm{d}x$

Übung 11. $\int x\sqrt{x^2+1}\mathrm{d}x$

Übung 12. $\int (x-1)^3\mathrm{d}x$

Übung 13. $\int \sin(3x)\cos(3x)\mathrm{d}x$

Übung 14. $\int 2^x\mathrm{d}x$ Hinweis $2^x = (e^{\ln(2)})^x = e^{x\ln(2)}$ und vergiss diesen Trick nie!

Übung 15. $\int (e^x - e^{-x})\mathrm{d}x$

Übung 16. $\int \sqrt{15x}\mathrm{d}x$

Übung 17. $\int \sqrt{5x+3}\mathrm{d}x$

Übung 18. $\int (1 - \frac{x^4}{24})\mathrm{d}x$

Übung 19. $\int 3e^{2x}\mathrm{d}x$

Übung 20. $\int \frac{3x}{4x^2+1}\mathrm{d}x$ Hinweis: Etwas mit Logarithmus scheint wahrscheinlich!

Übung 21. $\int \tan^2(x)\mathrm{d}x$

Übung 22. $\int \frac{x}{x+1}\mathrm{d}x$ Hinweis: Berechne zuerst $1-\frac{1}{1+x}$.

Übung 23. $\int \cos(8x)\mathrm{d}x$

Übung 24. $\int x^{5/3}\mathrm{d}x$

Übung 25. $\int(1+e^x)^3\mathrm{d}x$ Hinweis: Verknüpfungsregel bringt nichts.

Übung 26. $\int(1+e^x)^3e^x\mathrm{d}x$ Hinweis: Hier schon.

Übung 27. $\int \frac{xe^{x^2}}{e^{x^2}+1}\mathrm{d}x$

Übung 28. $\int x\cos(x)\mathrm{d}x$

Übung 29. $\int x^2\cos(x)\mathrm{d}x$ Hinweis: Etwas mit $x^2\sin(x)$ ausprobieren, aber dann geht es gut bis auf etwas wie $x\sin(x)$, und das kennen wir schon!

Übung 30. $\int x\sin(x^2)\mathrm{d}x$