Finanzmathematik

Hand-Out

1 Zinsen

Einfache Verzinsung. In diesem Fall werden die Zinsen nicht verzinst. Man könnte sich folgende Konstruktion vorstellen: Die Zinsen werden auf ein anderes Konto eingezahlt. Die folgende Formel für das Kapital $K(n)$ nach n gilt somit:

$$K(n) = K_0 \cdot \left(1 + n\frac{p}{100}\right) \tag{1}$$

in welcher p der jährliche Prozentsatz, K_0 das Anfangskapital, n die Laufzeit in Jahren.
Zinsenzinsen. In diesem Fall werden die Zinsen auch verzinst. Daher:

$$K(n) = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n . \tag{2}$$

Unterjährige Verzinsung. In diesem Fall wird ein jährlicher Prozentsatz p festgelegt, aber es wird öfter im Jahr ausgezahlt. Wenn k mal ausgezahl wird, wird $\frac{p}{k}$ Prozent vom aktuellen Kapital ausgezahlt. Daher gilt für das Kapital nach n Jahren:

$$K(n) = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100 \cdot k}\right)^{kn} .$$

Nun ist aber p nicht der wirkliche jährliche Zinssatz, denn dieser wäre:

$$1 + \frac{p_{eff}}{100} = \left(1 + \frac{p}{100 \cdot k}\right)^k > 1 + \frac{p}{100} \tag{3}$$

2 Kostenfunktion

Man wählt eine Produktionseinheit, und drückt die Anzahl der produzierten Ware in dieser Einheit aus; zum Beispiel wählt man nicht Dosen als Einheit, sondern 100 Dosen. Daher wird $x = 98$ dann bedeuten 9800 Dosen. Man trennt die Kostenfunktion $K(x)$ in **Fixkosten** $K_f = K(0)$ und **variable Kosten** $K_v(x) = K(x) - K(0)$. Oft beschreibt ein kubisches Polynom $K(x)$ recht gut.
Im Allgemeinen sollte $K'(x) > 0$ gelten, denn um so mehr man produziert, desto höher sind die zu leistende Kosten. Nur in speziellen Fällen wird $K'(x) < 0$, z.B. wenn man (nur) die Heizkosten eines zu mietenden Saales betrachtet, und x die Anzahl der Personen ist, die dort zu versammeln sind.
Man unterscheidet zwischen $K''(x) > 0$ und $K''(x) < 0$: Im ersten Fall nehmen die Kosten mit zunehmender x weniger schnell zu und diesen Fall bezeichnet man mit **progressiv**; Im zweiten Fall nehmen die Kosten mit zunehmender x immer schneller zu und dieser Fall wird mit **degressiv**. Das Wort regressiv wird auch benutzt, nml. falls $K'(x) < 0$.
Der Wendepunkt x_w von $K(x)$ heißt **Kostenkehre**, also $K''(x_w) = 0$. In der Regel ist $K(x)$ für $x \in (0, x_w)$ degressiv und für $x > x_w$ ist $K(x)$ progressiv.

3 Stückkostenfunktion

Die **Stückkostenfunktion** $\overline{K}(x)$ beschreibt die Kosten pro Produktionseinheit:

$$\overline{K}(x) = \frac{K(x)}{x}\,. \tag{4}$$

Das **Betriebsoptimum** x_{opt} ist das Extremum der Stückkostenfunktion: $\overline{K}'(x_{opt}) = 0$. Man nennt die zugehörige Produktion **Grenzbetrieb**, und zwar aus dem Grund, dass x_{opt} die Produktion angibt, bei der der Betrieb auf Dauer gerade noch rentabel ist. Somit ist $p_0 = \overline{K}(x_{opt})$ der **langfristige Mindestverkaufspreis**.
Das **Betriebsminimum** x_m berechnet man aus den **variablen Stückkosten** $\overline{K}_v(x)$:

$$\overline{K}_v(x) = \frac{K_v(x)}{x}\,, \qquad \overline{K}'_v(x_m) = 0\,. \tag{5}$$

Bei dem Betriebsminimum ist die Produktion kurzfristig rentabel, da die Fixkosten aus der Betrachtung ausgelassen wurden. Der Preis $p_m = \overline{K}_(x_m)$ ist der **kurzfristige Mindestverkaufspreis**.

4 Grenzkostenfunktion

Die erste Ableitung von $K(x)$ ist die **Grenzkostenfunktion**, sie beschreibt die Zunahme der Kosten bei steigender Produktion. Interessanterweise gilt

$$\overline{K}'(x) = \frac{K'(x)x - K(x)}{x^2} \tag{6}$$

sodass $K'(x_{opt}) = \frac{K(x_{opt})}{x_{opt}} = \overline{K}(x_{opt})$; die Grenzkosten sind den Stückkosten im Betriebsoptimum gleich. Ähnliches gilt für die variablen Stückkosten: $\overline{K}_v(x_m) = K'(x_m)$ im Betriebsminimum.

5 Preisfunktion

Die Variable x bezeichne die **Absatzmenge**, also die Menge der verkauften Ware. Die **Preisfunktion** $p(x)$ bezeichnet den Zusammenhang zwischen Preis und Absatzmenge: Die Relation könnte man mit $x = x(p)$, oder mit $p = p(x)$ beschreiben. Die Preisfunktion $p(x)$ ist in der Regel monoton fallend. Falls der Preis so ist, dass nichts mehr verkauft wird, dann ist der **Höchspreispunkt** erreicht, mathematisch durch $p(0)$ beschrieben. Falls die Absatzmenge so groß ist, dass der Preis auf Null fällt, also $p(x) = 0$, so ist der **Sättigungspunkt** erreicht. Wird mehr produziert, wird aber trotzdem nichts mehr verkauft - der Markt ist gesättigt.

6 Erlösfunktion und Gewinnfunktion

Der Erlös $E(x)$ ist durch $E(x) = x{\cdot}p(x)$ definiert; die Erlösfunktion beschreibt somit den Ertrag bei gegebener Absatzmenge. Die Gewinnfunktion beschreibt den Gewinn, also Ertrag minus Kosten: $G(x) = E(x) - K(x)$.
Der **Break Even Point** ist der Punkt, bei dem gerade Gewinn gemacht werden kann: $G(x) = 0$, also $E(x) = K(x)$.
Im **Cournot'schen Punkt** x_C ist der Gewinn maximal, sodass $G'(x_C) = 0$. MaW, $E'(x) = K'(x)$, und somit taucht die Grenzkostenfunktion wieder auf.

Quellen

`http://casti.nussnet.at/Wirtschaftsmathematik.pdf`
`https://de.wikipedia.org/wiki/Grenzkosten`