Erste Schularbeit Mathematik Klasse 8A G am 23.11.2016

SCHÜLERNAME: ____

Punkte im ersten Teil: __________________

Punkte im zweiten Teil: __________________

Davon Kompensationspunkte: __________________

Note: ____________________________________

Notenschlüssel:
Falls die Summe der erzielten Kompensationspunkte im zweiten Teil und des ersten Teils weniger als 16 ist, so ist die Note `Nicht Genügend`. Falls diese Summe 16 oder mehr beträgt, dann wird folgender Notenschlüssel benutzt:

NOTENSCHLÜSSEL	
41 - 48 Punkte	Sehr Gut (1)
33 - 40 Punkte	Gut (2)
25 - 32 Punkte	Befriedigend (3)
16 - 24 Punkte	Genügend (4)

Aufgabe 1. (2P) **Funktionsklassen ihren Eigenschaften zuordnen**.
In der linken Tabelle sind vier Eigenschaften von Funktionen gegeben. In der rechten Tabelle sehen Sie Fynktionstypen, bei denen die Parameter a, b, und c beliebige, reelle Zahlen annehmen können. Ordnen Sie jeder Eigenschaft einen Funktionstypen in der linken Tabelle zu!

Linke Tabelle	
Es gibt eine positive Zahl p mit $f(x+p) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.	
Die Differenz $f(x+1) - f(x)$ ist von x unabhängig.	
Der Quotient $\frac{f'(x)}{f(x)}$ ist von x unabhängig.	
Das Produkt $x \cdot f(x)$ hängt nicht von x ab.	

Rechte Tabelle	
A	$f(x) = ax^2 + bx + c$.
B	$f(x) = \frac{a}{x}$.
C	$f(x) = ax + b$.
D	$f(x) = a \cdot e^{\lambda x}$.
E	$f(x) = a \cdot x^b$.
F	$f(x) = a \cdot \sin(bx)$.

Aufgabe 2. (2P) **Interpretationssache**.
Es sei $P(t)$ die Leistung eines Geräts, das um 8:00 eingeschalten wird, wobei t die Zeit in Sekunden ab 8:00 bedeutet. Die Leistung P wird in Watt (Joule pro Sekunde) ausgedrückt. Interpretieren Sie den Ausdruck $\int_0^{3600} P(t)\mathrm{d}t$.

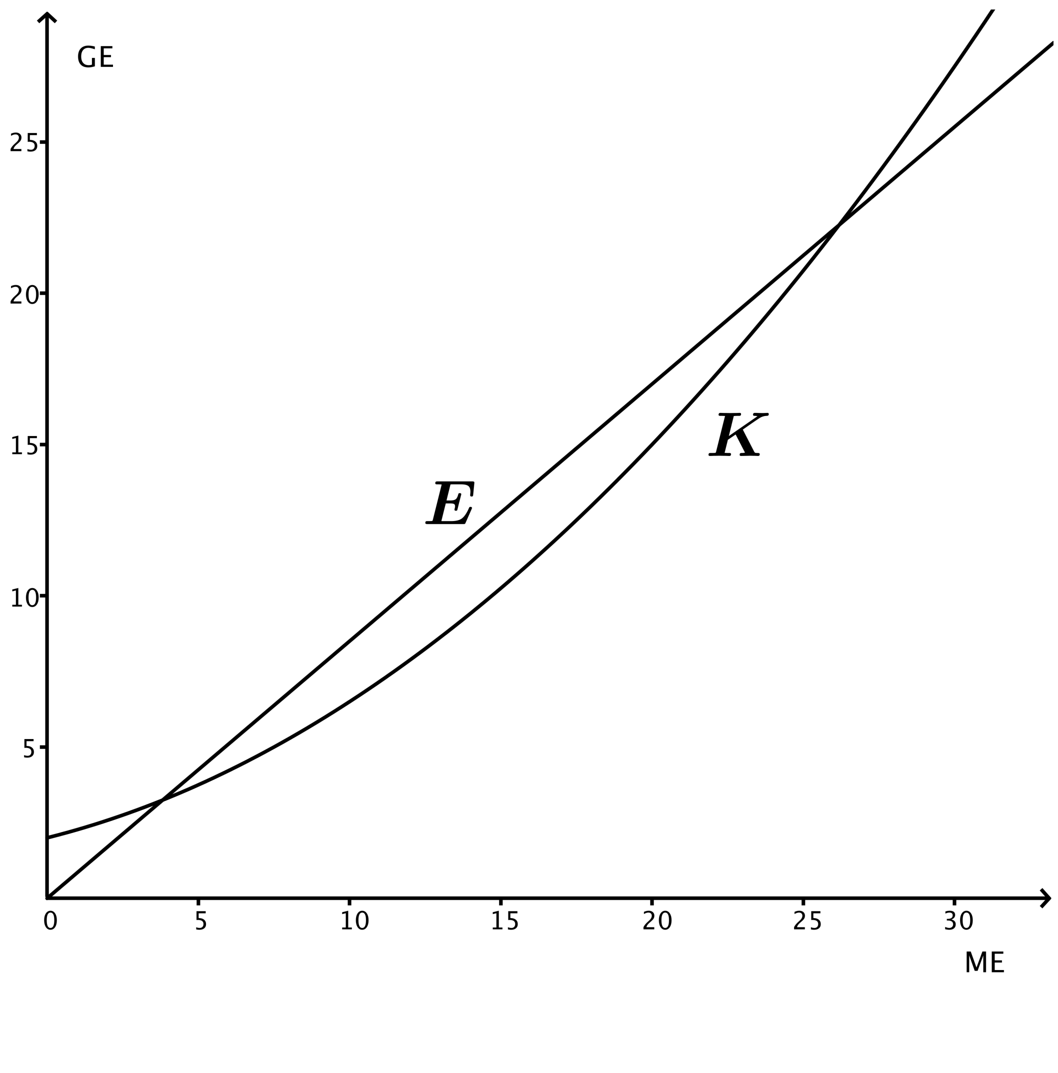
Antwort:

Aufgabe 3. (2P) **Bedeutung der Ableitung**.
Ein Flugzeug steigt nach dem Starten auf. Die Höhe des Flugzeuges (in Metern) wird während der ersten 900 Sekunden des Fluges durch die Funktion $h : [0; 900] \to \mathbb{R}$ dargestellt. Interpretieren Sie den Ausdruck $h'(300)$ in diesem Kontext.

Aufgabe 4. (2P) **Parabelfläche**.
Gegeben ist die Parabel $y = 9 - x^2$. Bestimmen Sie die Fläche A, die von der Parabel und der x-Achse eingeschlossen wird.

$A =$ ______________

Aufgabe 5. (2P) **Gewinn und Kosten**.
Im Diagramm sehen Sie die Graphen der Kostenunktion K und der Erlösfunktion E (beide in GE) in Abhängigkeit der Produktionsmenge x (ME). Zeichnen Sie den Graphen der Gewinnfunktion G ein und geben Sie an, in welchem Produktionsbereich Gewinn gemacht wird.



Aufgabe 6. (2P) **Autofahrt**.
Ein Auto fährt mehrere Stunden mit konstanter Geschwindigkeit und legt dabei in drei Stunden 180 Kilometer zurück. Geben Sie eine Funktionsvorschrift für den zurückgelegten Weg $s(t)$ (in Kilometer) seit dem Startpunkt, wobei die Zeit ab dem Start t in Stunden angegeben wird.

$s(t) =$ ______________________________________

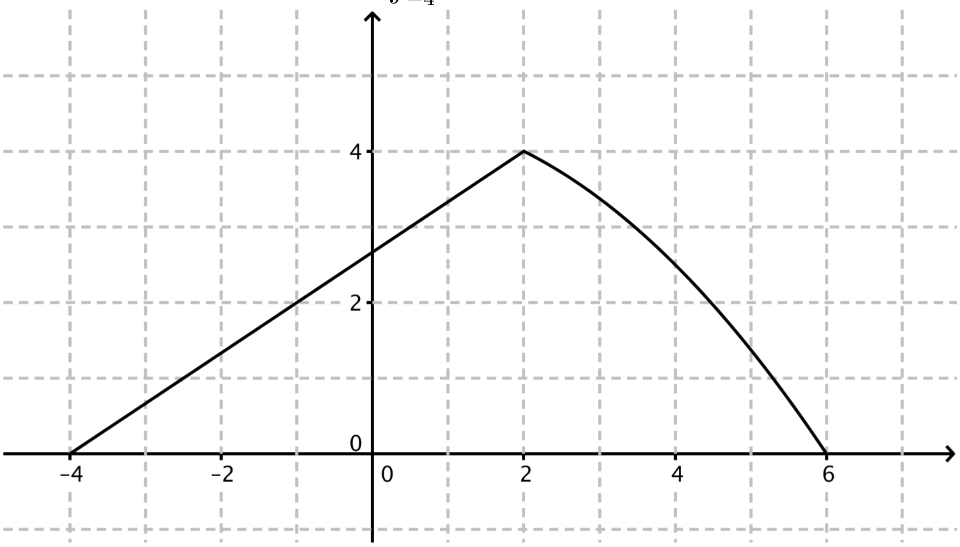
Aufgabe 7. (2P) **Stammfunktionen**.
Gegeben sind die Funktionen $a(x) = 3x^2$ und $b(x) = \frac{2}{x^2}$. Ermitteln Sie die unbestimmten Integrale von a und b! (Achtung: $+C$ nicht vergessen!)

$\int a(x)\mathrm{d}x =$ ______________________ , $\int b(x)\mathrm{d}x =$ ______________________ .

Aufgabe 8. (2P) **Parallele Geraden**.
Gegeben ist die Parabel $y = \frac{x^2-x}{5}$. Bestimmen Sie in welchem Punkt die Tangente an der Parabel parallel zur Sekante durch die Punkte $(0|0)$ und $(5|4)$ ist.

$x =$ _______________

Aufgabe 9. (2P) **Ermitteln eines Integrals**.
In der Abbildung sehen Sie den Graphen einer Funktion h. Im Intervall $[-4; 2]$ ist sie eine lineare Funktion mit $h(-4) = 0$ und $h(2) = 4$, im Intervall $[2; 6]$ ist sie quadratisch mit Funktionsvorschrift $h(x) = \frac{36-x^2}{8}$.
Bestimmen Sie das Integral $\int_{-4}^{6} h(x)\mathrm{d}x$.



$\int_{-4}^{6} h(x)\mathrm{d}x =$ ____________________

Aufgabe 10. (2P) **Parameter einer Exponentialfunktion bestimmen**.
Gegeben ist die Funktion $f(x) = ae^{\lambda x}$, wobei $a \in \mathbb{R}^+$. Bestimmen Sie $a > 0$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ so, dass $f(3) = 12$ und $f(1) = 3$.

$a =$ _____________ $\lambda =$ _____________.

Aufgabe 11. (2P) **Graphen, Funktionen und Stammfunktionen**.

Gegeben sind vier Graphen von Funktionen f_1, f_2, f_3 und f_4. Ordnen Sie jedem Diagramm eine Stammfunktion aus der Tabelle zu!

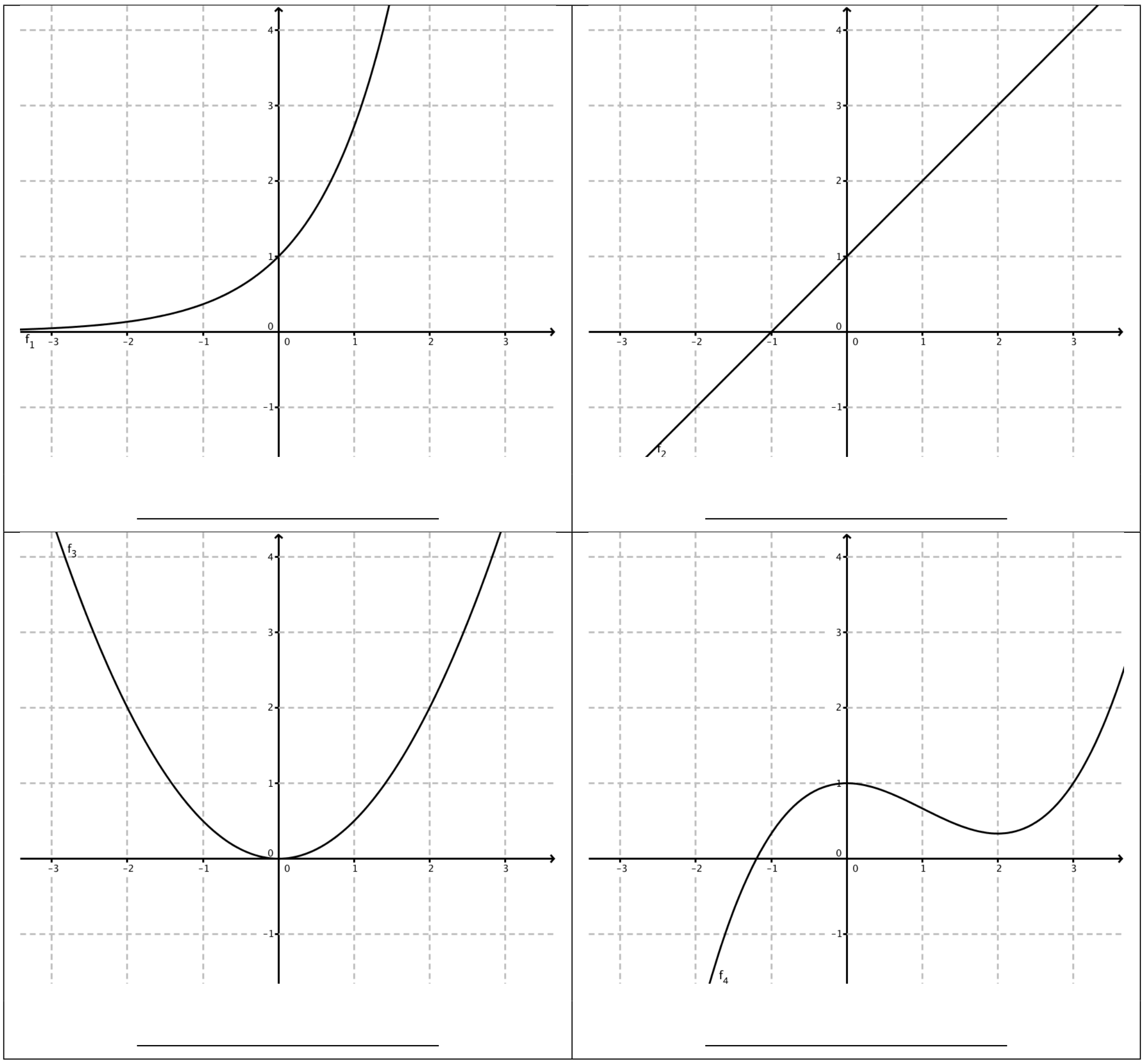
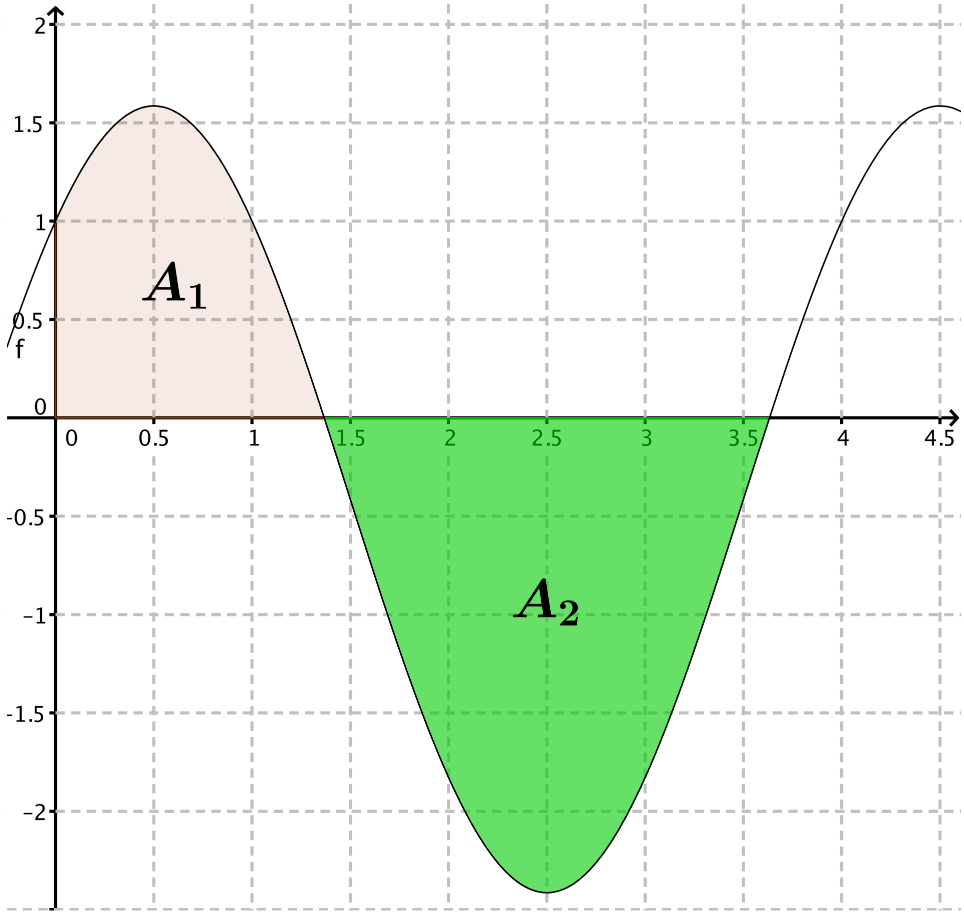


Tabelle mit Stammfunktionen	
A	$F(x) = \frac{x^3}{6} + 5.$
B	$F(x) = \frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{6} + x - 1.$
C	$F(x) = e^x + 1.$
D	$F(x) = e^{-x} - 1.$
E	$F(x) = \frac{x^2}{2} + x + 1.$
F	$F(x) = \frac{x^2}{2} + 1.$

Aufgabe 12. (2P) **Flächeninhalt und Integral**.
In der folgenden Abbildung ist der Graph der Funktion f dargestellt. Die Funktion f hat mindestens zwei Nullstellen; sichtbar sind die Nullstellen $x_1 \approx 1,37$ und $x_2 \approx 3,57$. In der Abbildung sind auch die Flächen A_1 und A_2 dargestellt. Kreuzen Sie die richtige(n) Aussage(n) in diesem Kontext an!



☐	$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x = A_1 + A_2$
☐	$\int_{0}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x = A_2 + A_1$
☐	$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x = A_2 - A_1$
☐	$\int_{0}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x = A_1 - A_2$
☐	$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x = -A_2$

Erste Schularbeit Mathematik Klasse 8A G am 23.11.2016

TEIL 2

SCHÜLERNAME: ____

Aufgabe 1. *Finanzmathematik.*

In Firma Epsilon werden Getränke produziert. Die Produktionsmenge (in Mengeneinheiten ME) wird mit x bezeichnet. Es sei $K(x)$ die Kostenfunktion, wobei die Kosten in Millionen Euro angegeben werden. In guter Annäherung kann K durch folgendes Polynom beschrieben werden:

$$K(x) = \frac{1}{1000} \cdot x^3 - \frac{3}{100} \cdot x^2 + \frac{8}{25} \cdot x + 3000$$

(a). (1 Kompensationspunkt) Geben Sie einen Termausdruck für die Grenzkostenfunktion.

(b). (3 Punkte) Geben Sie an, in welchem Interval der Verlauf der Kostenfunktion progressiv bzw. degressiv ist, und bestimmen Sie die Kostenkehre.

(c). (3 Punkte) Die Erlösfunktion beschreibt den Ertrag $E(x)$ in Abhängigkeit von der produzierten Menge x. Für die Firma Epsilon wird $E(x)$ durch $E(x) = 420x$ gegeben. Die Gewinnfunktion $G(x) = E(x) - K(x)$ beschreibt den Gewinn der Firma. Bestimmen Sie den Cournot'schen Punkt x_C und den maximalen Gewinn.

Aufgabe 2. *Wasser aus der Badewanne.*

Aus einer Badewanne strömt das Wasser mit Durchflussrate $I(t)$ (in Liter pro Sekunde), gegeben durch folgende Formel

$$I(t) = 0,45 - 0,0005 \cdot t\,.$$

In dieser Formel ist die Zeit t in Sekunden angegeben und zum Zeitpunkt $t = 0$ wurde der Stöpsel aus der Wanne gezogen.

(a). (1 Kompensationspunkt) Interpretieren Sie die Ausdrücke $\int_0^{10} I(t)\mathrm{d}t$ und $\frac{\int_0^{10} I(t)\mathrm{d}t}{10}$.

(b). (4 Punkte) Berechnen Sie, zu welcher Zeit t gilt, dass $I(t) = 0$. Deuten Sie diese Zeit im Kontext und berechnen Sie dann, wie viel Wasser zu $t = 0$ noch in der Badewanne war.

Aufgabe 3. *Drehkörper.*

Es sei $f(x) = 15 - 2 \cdot e^x$ gegeben.

(a). (1 Kompensationspunkt) Bestimmen Sie $a > 0$ so, dass $f(a) = 0$.

(b) (4 Punkte) Die Fläche, die von dem Graphen von f, der y-Achse, der x-Achse und der Geraden $x = a$ eingeschlossen wird, wird um die x-Achse gedreht. Berechnen Sie das Volumen des so entstandenen Rotationskörpers. (Falls Sie (a) nicht haben, nehmen Sie $a = 2$.)

Aufgabe 4. *Integralfunktionen.*

Gegeben ist eine positive und stetige Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}^{>0}$.
Betrachten Sie die folgende Funktion $g(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$, definiert auf dem Intervall $D_g = [0, \infty)$.
(a). (1 Kompensationspunkt) Kreuzen Sie die richtige(n) Aussage(n) an!

☐	g ist eine stetige Funktion ohne Nullstellen.
☐	$g'(x) = f(x)$.
☐	g ist monoton fallend.
☐	$f'(x) = g(x)$.
☐	g hat genau eine Nullstelle.

(b). (4 Punkte) Betrachten wir des Weiteren noch folgende Funktionen: $h(x) = \int_1^x f(t)\mathrm{d}t$ und $j(x) = \int_2^x f(t)\mathrm{d}t$ für $x \geq 2$. Begründen Sie, dass $j(x) < h(x) < g(x)$ für alle $x \geq 2$, geben Sie einen Ausdruck für $j(x) - g(x)$ und zeigen Sie, dass g, j und h Stammfunktionen von f sind.

Aufgabe 5. *Stetigkeit.* (2 Punkte)

Erklären Sie den Begriff „Stetigkeit“ und geben Sie eine Funktion an, die nicht stetig ist.