Planungsblatt Mathematik für die 3D

Woche 16 (von 18.12 bis 22.12)

Hausaufgaben [1]

Bis Mittwoch 20.12:

☞ Erledige und/oder lerne die Aufgaben 4.62(a)(b)(c), 4.65, 4.66, 4.67(a)(b), 4.68(a)(b), 4.69(a)(b)(c) und 4.70

Bis Donnerstag 21.12:

☞ Erledige und/oder lerne die Aufgaben: 4.73, 4.76(a)(b)(c)(d), 4.77(a)(b)(c), 4.78(a)(b), 4.80(a)(b)(c)(d), 4.81(a)(b)(c)(d)

Bis Freitag 22.12:

☞ Erledige und/oder lerne die Aufgaben 4.84(b), 4.85, 4.87, 4.88(a)(b)(c)(d), 4.90(a)(b)(c), und erweitert: 4.93, 4.96(a)(b)(c)(d) und 4.97(a)(f)

Bis Montag 08.01:

☞ Erledige und/oder lerne die Aufgaben 4.99(a)(b), 4.100 und 4.101(a)(b)

Kernbegriffe dieser Woche:

Terme und Algebra – Rechnen mit Buchstaben

Ungefähre Wochenplanung

Schulübungen.

(a) Montag (3. Std): (i) HÜ-Bespr. und evt. mSWH, (ii) Produkte ergänzen, auch wohl dividieren: 4.62(a)(b)(c), Vereinfachen: 4.65, 4.66, 4.67(a)(b), 4.68(a)(b), 4.69(a)(b)(c) und 4.70

(b) Mittwoch (2. Std): (i) HÜ-Bespr. und evt. mSWH, (ii) 4.73 , (iii) Distributivgesetz: 4.76(a)(b)(c)(d), 4.77(a)(b)(c), 4.78(a)(b), 4.80(a)(b)(c)(d), 4.81(a)(b)(c)(d)

(c) Donnerstag (5. Std): (i) HÜ-Bespr. und evt. mSWH (ii) Distributivgesetz: 4.84(b), 4.85, 4.87, 4.88(a)(b)(c)(d), 4.90(a)(b)(c), und erweitert: 4.93, 4.96(a)(b)(c)(d) und 4.97(a)(f)

(d) Freitag (6. Std): (i) HÜ-Bespr. und evt. mSWH (ii) Wiederholen einiger Aufgaben, dann: 4.99(a)(b), 4.100 und 4.101(a)(b) und einen ruhigen Ausklang des Kalenderjahres haben.

Unterlagen auf `www.mat.univie.ac.at/~westra/edu.html`

[1] Für manche Aufgaben wird auf Rückseite/Anhang/Buch/Arbeitsblatt verwiesen.

Algebra und Rechnen – (freiwillig)

Algebra macht man teilweise, um Regelmäßigkeiten bei Berechnungen auf die Spur zu kommen. Hier ein Versuch euch nach eigenem Ermessen hierin schon Erfahrung zu bekommen.

Problem 1. *Das Addieren von Potenzen von 2.* Berechne zuerst mal einige Summen: Wir fangen an mit S_0, und dann rechnest du die folgenden aus:
(a) $S_1 = 1 + 2$, (b) $S_2 = 1 + 2 + 4$, (c) $S_3 = 1 + 2 + 4 + 8$, (d) $S_4 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16$.
Fällt dir dabei etwas auf? Falls wir schreiben $S_n = 1 + 2 + 4 + \ldots + 2^n$, dann ist S_n fast 2^{n+1}. Was fehlt? Kontrolliere deine Vermutung für noch mehr Werte von n.
Falls du einen Beweis willst, oder findest, dann liefere den dazu!

Problem 2. *Das Reduzieren einer Multiplikation auf Quadrate.* Kontrolliere bitte, dass folgende Gleichheiten gelten:
(a) $15 \cdot 13 = 14^2 - 1$, (b) $101 \cdot 99 = 100^2 - 1$, (c) $15 \cdot 21 = 18^2 - 3^2$, (d) $33 \cdot 39 = 36^2 - 3^2$.
Was ist die Regelmäßigkeit hier? Kontrolliere für viele Zahlen, dass $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.
Falls nun etwas wie $75 \cdot 125$ auszurechnen ist, suche ich zuerst zwei Zahlen A und B, sodass $A - B = 75$ und $A + B = 125$. Dazu nehme ich für A die Zahl genau zwischen 75 und 125, und B ist dann der Unterschied zwischen dieser Zahl und 75 (bzw. 125). Also $A = 100$ und $B = 25$. Somit ist $75 \cdot 125$ dasselbe wie $100^2 - 25^2$ also $10.000 - 625$. Versuche jetzt du auch mehrere Beispiele zu finden!

Problem 3. *Aufeinander folgende natürliche Zahlen addieren.* Kontrolliere die folgende Formel für verschiedene Werte von n, indem du sowohl jeweils die linke Seite, wie auch die rechte Seite ausrechnest:

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} \, .$$

Ich gebe dir die ersten drei schon: $1 = \frac{1(1+1)}{2}$, $1 + 2 = 3$ und $\frac{2(2+1)}{2} = 3$, $1 + 2 + 3 = 6$ und $\frac{3 \cdot (3+1)}{2} = 6$. Jetzt kontrolliere du mehrere weiter. Warum ist dies aber so? Spiele etwas mit dieser Formel, und vielleicht findest du eine Antwort. Falls nicht: Notizen, oder Internet, oder mich fragen.

Problem 4. Sterne strahlen weil die Oberfläche warm ist. Diese Strahlung nennt man thermische Strahlung. Ein heißes Stück Eisen glüht aus demselben Grund. Interessanterweise hängt die Art von Strahlung (welche Farbe sozusagen) von der Temperatur ab. Wir Menschen strahlen auch, genau so wie der Boden unter unseren Füßen, nur halt im Infrarotbereich, und das sehen wir leider nicht. Interessanterweise hängt auch die ausgestrahlte Leistung P von der Temperatur ab, und zwar durch die folgende Formel:

$$P = A\sigma T^4 \, .$$

Hierbei ist A die Oberfläche des Objekts, $\sigma \approx 6 \cdot 10^{-8} W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}$ ist eine bestimmte Naturkonstante (eine fixe Zahl). Berechne jetzt folgende Sachen:
(a) Schätze die Oberfläche eines Menschen (in m^2) ab, nimm für T die Körpertemperatur in Kelvin, und berechne dann die von einem Menschen ausgestrahlte Leistung.
(b) Die Temperatur der Sonnenoberfläche beträgt etwa $5500K$. Der Sonnenradius beträgt etwa $R_s \approx 7 \cdot 10^8 m$. Die Fläche einer Kugel berechnet man mit $A = 4 \cdot \pi \cdot R^2$, wobei $\pi \approx 3,14$ auch eine wichtige Konstante namens „pi“ ist. Jetzt kannst du die von der Sonne ausgestrahlte Leistung berechnen.
(c) Wie ändert sich das Ergebnis von (b), wenn die Temperatur der Sonne nur etwa 2750 K wäre, oder sogar 11000? Versuche deine Ergebnisse mit Verhältnissen auszudrücken.
(d) Berechne die Leistung, die das Sonnenlicht auf einen Quadratmeter hier auf der Erde bringt. Hinweis: Die von der Sonne ausgestrahlte Leistung geht in allen Richtungen. Somit verdünnt sie sich sozusagen, weil eine Kugel mit größerem Radius eine größere Fläche hat. Stelle dir eine Kugel um die Sonne vor, welche gerade auch die Erde umfasst, also einen Radius von $1,5 \cdot 10^1 1m$

(Distanz Erde–Sonne) hat. Die Leistung, die pro Sekunde durch diese Kugel geht, ist der von der Sonne ausgestrahlen Leistung gleich. Benutze dann dein Ergebnis von (b). Dein Ergebnis sollte der sogenannten Solarkonstante sehr nahe sein: 1367 Watt pro Quadratmeter.

(e) Eine Glübirne glüht, weil der Draht so warm ist, dass auch er sichtbare thermische Strahlung ausstrahlt. Die Leistung einer Glühbirne ist so rund die 60W. Die Temperatur liegt im Bereich zwischen 1200 und 3000 Kelvin. Finde geeignete Abschätzungen für die Fläche des Drahtes! Stimmen diese mit deiner geometrischen Einschätzungen überein?

(f) Die Sonne ist also etwa 4-mal heißer als eine Glühbirne. Benutze die Formel für P um zu begründen, dass ein Bisschen Material von der Sonne, genau so viel Material wie der Draht einer Glühbirne groß ist, etwa $4^4 = 256$-mal heller strahlt als eine Glühbirne.

Rechnen: Basisfähigkeit! – (semifreiwillig)

Die beste Art und Weise, diese Aufgaben zu machen, wäre: (1) Druck diese Aufgaben aus; (2) Nimm genügend A4-Papier und einen guten Schreiber; (4) Fang ruhig rechnen an, und benutze das Blatt Papier so, dass die Arbeit ordentlich und übersichtlich bleibt. **Diese Aufgaben sind sinnlos, wenn du einen Taschenrechner verwendest!**

Aufgabe 1.
(a) $123 \cdot 654$
(b) $5786 + 98762$
(c) $123 - 6940$
(d) $5562 : 6$

Aufgabe 2.
(a) $\frac{4}{3} \cdot \frac{5}{7}$
(b) $1\frac{2}{3} + \frac{5}{7}$
(c) $\frac{5}{9} - \frac{10}{13}$
(d) $2\frac{5}{13} : \frac{8}{11}$

Aufgabe 3.
(a) $(3 - \frac{2}{5}) \cdot (\frac{2}{7} - 1)$
(b) $(1 + 3 + 5 + 7)^2 - (1 + 4 + 7)^3$
(c) $\sqrt{2^2 + 5^2 + 4^2 + 1^2 + 3^1}$
(d) $1^3 + 2^3 + 5^3 - 1^2 - 2^2 - 3^2$
(e) $(2 + 3 \cdot (3 - 5 \cdot (8 - 4)))$

Aufgabe 4.
(a) $1,27 \cdot 5,98 + 4,3 \cdot 4,2$
(b) $(3,2)^2 + (2,5)^2 + (1,2)^4$
(c) $(1,1)^5 + (1,2)^5$
(d) $3,15 : 0,05 + 3,15 : 0,3$
(e) $(1,0101)^2 + 1,0101 : 3$

Aufgabe 5.

(a) $$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{2} + \frac{2}{1+\frac{3}{5}}}$$

(b) $(\frac{1}{3} - \frac{1}{2})^3 + (\frac{3}{2} - \frac{3}{8})^2$
(c) $(625 - 24^2) \cdot (\frac{3}{8} - \frac{8}{3})$

Aufgabe 6. Stelle dir vor, du hast eine (endliche) Reihe positive, rationale Zahlen, wobei eine Zahl öfter als einmal vorkommen darf. Dann kanst du sie direkt addieren. Das nennen wir dann die Summe dieser Reihe. Folgendes ist aber auch möglich: du bestimmst von jeder Zahl in der Reihe den Kehrwert, dann bestimmst du die Summe der Kehrwerte, und in einem letzten Schritt nimmst du den Kehrwert dieser Summe von Kehrwerten. Wir nennen dies die harmonische Summe der Reihe. Ich zeige ein sehr einfaches Beispiel: ich nehme als Reihe $1, 1, 2$, dann sind die Kehrwerte $1, 1, \frac{1}{2}$, also ist die Summe dieser Kehrwerte $2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ und somit ist dann die harmonische Summe von 1, 1 und 2 die Zahl $\frac{2}{5}$. Jetzt bist du dran! Bestimme die harmonische Summe und die Summe der folgenden Reihen:
(a) $1, 1, 1, 1$
(b) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1, 1$
(c) $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$
(d) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$
(e) $1, 10, 100, 1000, 10000$